Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 25 septembre 2017

# Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

---

**L'usage des calculatrices est interdit.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

Dans tout le problème, on désigne par $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

**A. Étude de la fonction $f$**

**1)** Étude de $f$ en 0.

- **a)** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
- **b)** Peut-on déduire du développement limité du a), <u>sans nouveaux calculs</u>, que : (justifier avec soin)
  - $f$ est continue en 0 ?
  - $f$ est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$ ?
  - $f$ est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$ ?
- **c)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Donner une équation de la tangente $T$ à $(C)$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de $(C)$ par rapport à $T$ au voisinage de 0.

**2)** Variations de $f$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

- **a)** Dresser le tableau de variations complet de $g$ et donner le signe de $g$.
- **b)** Donner les variations de $f$.
- **c)** Donner les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de $(C)$ : montrer en particulier que $(C)$ possède deux asymptotes et préciser la position de $(C)$ par rapport à ses asymptotes.
- **d)** Donner l'allure de $(C)$ (faire apparaître les asymptotes et $T$).

**B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction $f$.**
On considère la suite$(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1)** Montrer que $f$ admet un point fixe et un seul, noté $\alpha$, que l'on calculera.

**2)** **a)** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

- **b)** Montrer : $\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
- **c)** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

**d)** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

**3)** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.

**4)** En déduire que $(u_n)$ converge vers une limite que l'on précisera.

## Exercice 2

On s'intéresse dans ce problème à la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On cherche ensuite à obtenir, par deux méthodes, des approximations de $\pi$ à l'aide de séries numériques.

### Partie 1 (Préliminaires)

**1)** Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler, sans preuve, une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$. On distinguera deux cas.

**2)** On rappelle que la notation Arctan désigne la fonction Arctangente. Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction Arctan, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et son tableau de variation, qui fera apparaître les limites.

### Partie 2 (Étude de la série)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

**1)** La série de terme général $u_n$ est-elle absolument convergente ? Toute réponse doit (évidemment) être justifiée.

**2)** Montrer que la série de terme général $u_n$ converge. On donnera aussi une majoration du reste d'ordre $n$.

**3)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_{2k} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\, \mathrm{d}t$.

**4)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

**5)** Démontrer que, pour tout entier $n$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

**6)** En déduire la somme de la série de terme général $u_n$, que l'on exprimera sans somme et sans intégrale.

### Partie 3 (Un procédé élémentaire d'approximation de $\pi$)

**1)** Démontrer, à l'aide de la partie précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|4U_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}$$

**2)** En déduire une approximation de $\pi$ à $10^{-3}$ près sous forme d'une somme de rationnels.

### Partie 4 (Un autre procédé d'approximation de $\pi$)

Soit $t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**1)** Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$. On donnera une fraction faisant intervenir $\pi$ et un entier.

**2)** En déduire que $\pi = 4\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

**3)** Donner une majoration du reste d'ordre $n$ de cette série.

**4)** De combien de terme a-t-on besoin pour obtenir une approximation de $\pi$ à $10^{-3}$ près ?

# Exercice 3

## Partie 1

**1)** Quelle est la période de la fonction tan ?

**2)** Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**3)** Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)$ telle que :

- $T_0(X) = X$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$, dérivée $n$-ième de la fonction tan, vérifie : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$

On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes $T_n$ et $T_{n+1}$.

**4)** Expliciter les polynômes $T_1$, $T_2$ et $T_3$.

**5)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme $T_n$ sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme $T_n$ ?

**6)** Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_k)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t))\, \mathrm{d}t$$

On citera le théorème utilisé.

## Partie 2

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n$-ième et $R_n$ la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t$$

**On suppose que $f$ est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$ tel que $x \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.**

**1)** Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité : $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$.

**2)** Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

**a)** Démontrer que la suite $(R_n(b))$ est convergente.

**b)** Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier :

**i)** $R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t$

**ii)** $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t$

**iii)** $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

**c)** En déduire que, pour tout $x \in ]-b, b[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

**3)** Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**