Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 8 septembre 2025

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (ATS 2025)

Partie A

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [k, k+1[$. Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor = k$. Donc

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{k} \text{ pour } k \leqslant x < k+1}$$

2) Représenter les fonctions f et g sur l'intervalle $[1, 6]$.

3) Par définition de la partie entière, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$. Par conséquent, par décroissance de $t \mapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant J_n}$$

4) Par Chasles, $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} g(x)\,\mathrm{d}x$. En remplaçant par l'expression trouvée à la question 1,

$$\boxed{J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x}$$

5) La fonction $x \mapsto 1/k$ étant constante, il vient

$$\boxed{J_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}}$$

Partie B

8) Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{array}{lll} \forall t \in [k-1, k], & 0 < k-1 \leqslant t \leqslant k & \\ \Longrightarrow \forall t \in [k-1, k], & \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k-1} & (\text{décroissance de } t \mapsto 1/t \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k-1} & (\text{croissance de l'intégrale}) \end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}$$

Et l'inégalité de droite s'écrit, décalant les indices,

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}}$$

9) Pour tout $k \geqslant 2$, la question précédente donne l'encadrement

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Soit $n \geqslant 2$. En sommant de $k = 2$ à n, il vient

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_2^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_a^b = \ln(b) - \ln(a)$, d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln(n)$$

Comme, de plus, $\ln(2) \leqslant 1 \leqslant 1$, en sommant avec l'encadrement précédent il vient

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1}$$

10) $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n)$.
Or, par composition de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(1+1/n) = 0$, c'est-à-dire $\ln(1+1/n) = o(1)$:

$$\ln(n+1) = \ln(n) + o(1)$$

D'où,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1}$$

11) Soit $n \geqslant 2$. L'encadrement de la question 9 s'écrit, en divisant par $\ln(n) > 0$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'après la question 10, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, et le membre de droite tend aussi vers 1.
Ainsi, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{H_n \sim \ln(n)}$$

12)
$$\begin{aligned} V_n &= U_{n+1} - U_n \\ &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

On peut écrire $1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$ en mettant au même dénominateur pour trouver la formule souhaitée. On pourrait aussi préférer la formule $-\ln(1 + /n)$ qui donne un développement en $1/n$ à la fin.

Conclusion :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

13) Développement limité : $ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Or $1/(n+1) \sim 1/n$, donc $1/(n+1)^2 \sim 1/n^2$ et

$$\boxed{V_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

14) D'après la question 13, $|V_n| \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison, $\sum V_n$ converge absolument donc converge :

$$\boxed{\text{La série de terme général } V_n \text{ converge}}$$

15) Soit $n \geqslant 1$ fixé. La série $\sum V_n$ est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} (U_{k+1} - U_k) = U_{n+1} - U_1$$

Notons $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k$, en remarquant que $U_1 = H_1 - \ln(1) = 1$, il vient

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell + U_1 = \ell + 1$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$$

16) En écrivant la limite ci-dessus à l'aide d'un petit o, il vient $U_n = \gamma + o(1)$. D'où

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

La constante γ s'appelle la constante d'Euler.

Exercice 2 (D'après Centrale PC 2025)

Partie A – Préliminaires

1) **a)** Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cosinus. Donc l'inégalité des accroissements finis, entre s et t, s'écrit

$$|\sin(s) - \sin(t)| \leqslant \Big(\sup_{h \text{ entre } s \text{ et } t} |\cos(h)| \Big) |s - t|$$

Or $|\cos| \leqslant 1$. D'où

$$\boxed{\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin(s) - \sin(t)| \leqslant |s - t|}$$

b) Soit $h > 0$, et $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t - s| < h$.
D'après la question précédente, $|\sin(s) - \sin(t)| \leqslant |s - t|$. D'où

$$|\sin(s) - \sin(t)| \leqslant h$$

Cette majoration étant vraie pour tout couple (s,t) tel que $|t - s| < h$, on peut passer à la borne supérieure :

$$\boxed{\omega_g(h) \leqslant h}$$

2) **a)** **i)** La fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, bornée et atteint ses bornes. Notons M la borne supérieure. Par 2π-périodicité, $|g|$ admet M pour borne supérieure sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $M = \|g\|_\infty$:

$$\boxed{\|g\|_\infty \text{ existe}}$$

ii) Soit $h > 0$. Par définition, $\omega_g(h) = \sup \mathscr{E}_h$. Pour montrer que $\omega_g(h)$ est réel, il suffit de montrer que $\mathscr{E}_h$ est majoré. Or, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|g(s) - g(t)| \leqslant |g(s)| + |g(t)| \leqslant 2\|g\|_\infty$$

Donc $\mathscr{E}_h$ est majoré par $2\|g\|_\infty$:

$$\boxed{\omega_g(h) \text{ est un réel bien défini}}$$

b) Appliquons à nouveau l'inégalité des accroissements finis, à g désormais. La fonction g' est continue et 2π périodique, donc, d'après 2.a.i, $\|g'\|_\infty$ existe.

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad |g(s) - g(t)| \leqslant \|g'\|_\infty |s-t| \leqslant h\|g'\|_\infty$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure,

$$\boxed{\forall h > 0, \quad \omega_g(h) \leqslant h\,\|g'\|_\infty}$$

Par encadrement,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \omega_g(h) = 0}$$

3) **a)** Avec les notations de la question 2.a.ii, $\mathscr{E}_h \subset \mathscr{E}_{h'}$ car

$$|g(s) - g(t)| \leqslant h \leqslant h'$$

D'où, en passant aux bornes supérieures,

$$\boxed{h \leqslant h' \Longrightarrow \omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')}$$

b) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|s-t| \leqslant h + h'$, et $u = \dfrac{h}{h+h'}s + \dfrac{h'}{h+h'}t$. Comme

$$\begin{aligned}
s - u &= \frac{h+h'-h}{h+h'}s - \frac{h'}{h+h'}t \\
&= \frac{h'}{h+h'}(s-t) \\
\Longrightarrow |s-u| &= \frac{h'}{h+h'}\,|s-t| < h' \qquad\qquad \text{car } |s-t| < h+h'
\end{aligned}$$

Il vient donc $|g(s) - g(u)| \in \mathscr{E}_h'$: $|g(s) - g(u)| \leqslant \omega_g(h')$. De même, $|g(u) - g(t)| \leqslant \omega_g(h)$.

$$\begin{aligned}
g(s) - g(t) &= g(s) - g(u) + g(u) - g(t) \\
\Longrightarrow |g(s) - g(t)| &\leqslant |g(s) - g(u)| + |g(u) - g(t)| \\
&\leqslant \omega_g(h') + \omega_g(h)
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, il vient

$$\boxed{\omega_g(h+h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')}$$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \omega_g(nh) \leqslant n\,\omega_g(h)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est immédiat.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} \omega_g((n+1)h) &\leqslant \omega_g(nh) + \omega_g(h) && (3b) \\ &\leqslant (n+1)\omega_g(h) && (\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \omega_g(nh) \leqslant n\,\omega_g(h)}$

Soit $\lambda > 0$. Par croissance (3a), $\omega_g(\lambda h) \leqslant \omega_g((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h)$. Puis, en appliquant le résultat ci-dessus à $n = \lfloor \lambda \rfloor + 1$,

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \quad \omega_g(\lambda h) \leqslant (1+\lambda)\omega_g(h)}$$

4) Soit G une primitive de g, donc une fonction $\mathscr{C}^1$ telle que $G' = g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f(x) = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(\pi + x) - G(-\pi + x)$$

En dérivant, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(\pi + x) - g(-\pi + x) = 0$ par 2π-périodicité de g. Donc f est une fonction constante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = G(\pi) - G(-\pi)$. C'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

5) Linéarité : Soient $p, q \in \mathcal{T}_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après l'énoncé, $\lambda p + q \in \mathcal{T}_n$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda p + q)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda p + q)(x - t) g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \lambda p(x-t)g(t) + q(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\Delta(p)(x) + \Delta(q)(x) && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.

$\underline{\Delta : \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_n}$: Soit $p : x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \in \mathcal{T}_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Delta(p)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(x-t)} \right) g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikt} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx} && \text{où } d_k = c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Donc $\Delta(p) \in \mathcal{T}_n$. Conclusion :

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(\mathcal{T}_n)}$$

Partie B

I – La fonction J_n

6) Soit $t \in \mathbb{R}$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $e^{it} \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{it}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \\
&= e^{-ni\frac{t}{2}} \frac{e^{i(n+1)t/2}\left(e^{-i(n+1)t/2} - e^{i(n+1)t/2}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2} - e^{it/2}\right)} \\
&= \frac{-2i\sin((n+1)t/2)}{-2i\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4}$$