Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 8 septembre 2025

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Série Harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

L'objectif de la première partie est de montrer que H_n est proche de $\ln(n)$ lorsque n devient grand en proposant une approche numérique de calcul d'intégrale.
L'objectif de la seconde partie est d'étudier le comportement de H_n lorsque n devient grand : il s'agit de trouver les premiers termes du développement asymptotique de H_n.
Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A
On rappelle que la **partie entière** d'un nombre réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'**entier** $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leqslant x < n + 1.$$

On considère la fonction $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, et la fonction $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (constante par morceaux) définie par $g(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{k}$ pour $k \leqslant x < k + 1$.

2) Représenter les fonctions f et g sur l'intervalle $[1, 6]$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant J_n$.

4) Montrer que $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$.

5) Montrer que $J_n = H_{n-1}$.

Partie B

8) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k \geqslant 2$,
$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
et que pour $k \geqslant 1$,
$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

9) En déduire que $\forall n \geqslant 1$:
$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

10) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

11) Montrer que H_n est équivalent en $+\infty$ à $\ln(n)$.

12) Pour $n \geqslant 1$ un entier, on note
$$U_n = H_n - \ln(n)$$
et
$$V_n = U_{n+1} - U_n.$$
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$V_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

13) Montrer que pour n suffisament grand, on a :
$$V_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

14) Déterminer la nature de la série de terme général V_n.

15) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite, notée γ.

16) En déduire les premiers termes du développement asymptotique de H_n.

Exercice 2 (D'après Centrale)

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme
$$x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$
où, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodiques. Pour $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $h > 0$, on pose :
$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s|\leqslant h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

On rappelle deux résultats :

- Le théorème des bornes atteintes : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- L'inégalité des accroissements finis : Soit $a < b$ deux réels. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle qu'il existe deux réels m et M vérifiant $m \leqslant f' \leqslant M$, alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Partie A – Préliminaires

1) **a)** Montrer que, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(s) - \sin(t)| \leqslant |s-t|$.

b) En déduire que, si g est la fonction sinus, alors, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h$.

2) **a)** Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

i) Montrer que $\|g\|_\infty$ existe, c'est-à-dire que la borne supérieure est un réel.

ii) Montrer que, pour tous et $h > 0$, $\omega_g(h)$ est un réel bien défini.
On pourra considérer l'ensemble $\mathscr{E}_h = \{|g(s) - g(t)| \ | \ |s-t| \leqslant h\}$.

b) On suppose que $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$. Montrer que, pour tout $h > 0$, $\omega_g(h) \leqslant h \|g'\|_\infty$. En déduire que $\lim\limits_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$.

On admet que $\lim\limits_{h \to 0} \omega_g(h) = 0$ *est vrai pour tout* $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

3) Soit h et h' deux réels strictement positifs et soit $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

a) Montrer que, si $h \leqslant h'$, alors $\omega_g(h) \leqslant \omega_g(h')$.

b) En posant $u = \dfrac{h}{h+h'} s + \dfrac{h'}{h+h'} t$, montrer que $\omega_g(h+h') \leqslant \omega_g(h) + \omega_g(h')$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel λ strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leqslant n\,\omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leqslant (1+\lambda)\omega_g(h).$$

4) Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. À l'aide de G, une primitive de g, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra exprimer les intégrales à l'aide de G.

5) Soit $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathcal{T}_n$, on note $\Delta(p)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que Δ définit un endomorphsime de $\mathcal{T}_n$, c'est-à-dire que Δ est linéaire et à valeur dans $\mathcal{T}_n$.

Partie B –

I – La fonction J_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

6) Montrer que pour tout réel t n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4.$$

7) Montrer que φ_n^2 appartient à $\mathcal{T}_n$, puis que f_n appartient à $\mathcal{T}_{2n}$. Montrer que f_n est paire.

8) Montrer qu'il existe un réel strictement positif c_n tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose désormais $J_n = c_n f_n$, de sorte que J_n est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

II – Une majoration de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

9) En étudiant la parité des fonctions concernées, montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t}$.

10) Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t$.

11) **a)** Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} t\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$.

On admettra que l'on peut alors étudier et manipuler l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} t\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 \mathrm{d}t$ comme si la fonction $t \mapsto t\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$ était définie en $t = 0$.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u$.

12) De même, en déduire également que $\displaystyle\int_0^{\pi} t\, f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u$.

13) On admet que $\displaystyle\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u \leqslant M_1$, où $M_1 \in \mathbb{R}$ est indépendant de n, et $\displaystyle\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u \geqslant m_2$ où $m_2 \in \mathbb{R}$ est aussi indépendant de n.

Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{n+1}$.

III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $T_n g$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques telle que $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

14) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) g(x)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\displaystyle |T_n g(x) - g(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) |g(x-t) - g(x)|\,\mathrm{d}t$.

15) *Le cas $\mathcal{C}^1$.* On suppose, seulement dans cette question, que g est $\mathcal{C}^1$.

a) En commençant par majorer $|T_n g(x) - g(x)|$ (où $x \in \mathbb{R}$ quelconque), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant \frac{a\|g'\|_\infty}{n+1},$$

où le réel a a été défini à la question 13

b) Conclure que $(T_n g)$ est une suite de polynômes trigonométriques telle que $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

16) *Le cas $\mathcal{C}^0$.* Dans cette question, on ne suppose plus que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
On rappelle le résultat admis à la question 2 : $\lim\limits_{h\to 0} \omega_g(h) = 0$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t et x,

$$|g(x-t) - g(x)| \leqslant (1 + n|t|)\,\omega_g(1/n).$$

b) En déduire qu'il existe $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|T_n g - g\|_\infty \leqslant b\,\omega_g(1/n).$$

c) Conclure que $\|T_n g - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

FIN DE L'ÉPREUVE