Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 11 septembre 2023

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1) **a)** Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

Indication : $\cos^n t = (\cos t)(\cos^{n-1} t)$.

c) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

2) **a)** Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

b) Montrer que $W_n \sim W_{n-1}$.

c) En déduire un équivalent de W_n.

B. Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$.

1) **a)** Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) Exprimer simplement v_n en fonction de n.

c) Rappeler le développement limité de $\ln(1-u)$ à l'ordre 3 en $u=0$.

d) Donner un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_n$.

e) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.

f) En déduire que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K>0$ tel que

$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

2) **a)** En utilisant la question A.1b, montrer que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. En déduire W_{2p+1} en fonction de p.

b) Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$ à l'aide de l'équivalent de $n!$ trouvé précédemment.

c) En déduire la valeur de K, et, par suite, un équivalent de $n!$.

Exercice 2

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0)=0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x\ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction g sur $[0,1]$, puis tracer sa courbe représentative.

2) En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3) On définit la suite $(t_n)_n$ par $t_0 \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

4) Montrer que, pour tout réel $x\in[t_0, e^{-1}]$:

$$0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1}-x)$$

Puis que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x-e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5) En déduire que, pour tout entier non nul $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

6) Quelle est la limite de la suite $(t_n)_n$?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer par différentes méthodes que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Les parties sont indépendantes.

Partie 1

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$: $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P, avec multiplicité. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2) **a)** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binomial pour $k \in \{0, \ldots, p\}$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \neq 0[\pi]$, on a

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2(\varphi)\right)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \pi/2[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4) **a)** En admettant que, pour tout $\varphi \in]0, \pi/2[$, $0 < \sin \varphi < \varphi < \tan \varphi$, montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

b) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 2

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \cos(kx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$$

2) Soit $x \in]0, \pi]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

3) Soit ψ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} \int_0^\pi \psi(x) \sin(mx)\, \mathrm{d}x = 0$.

4) Soit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, \pi],\ g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin(x/2)} \quad \text{et} \quad g(0) = -1$$

a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi 2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2) g(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DE L'ÉPREUVE