

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (BECEAS 2021)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties. *Vérifiez vos primitives.*

$$u = \sin x \qquad u' = \cos x$$
$$v = \cos^{2n-1} x \qquad v' = -(2n-1)\sin x \cos^{2n-2} x$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{2n-1} x \,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x \cos^{2n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x \,\mathrm{d}x && \text{Or } \sin^2 = 1-\cos^2 \\ &= 0 + (2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x\right) && \text{Car } 2n-1 \geqslant 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le calcul du 1),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = C_{n-1} - C_n = \frac{C_n}{2n-1}$$

De plus, l'égalité trouvée au 1) entraîne $C_n = (2n-1)C_{n-1} - (2n-1)C_n$ puis

$$C_n = \frac{2n-1}{2n} C_{n-1}$$

C'est la question 2. On cherche à relier C_n et C_{n-1} (méthode : bien comprendre le but). Donc on exprime C_n en fonction de C_{n-1} (méthode : même si on ne voit pas où le calcul va, essayer de le faire).

Ainsi, en remplaçant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons deux intégrations par parties successives.

$$u = \cos^{2n} x \qquad u' = -2n \sin x \cos^{2n-1} x$$
$$v = x \qquad v' = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x \cos^{2n} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x \,\mathrm{d}x \\
&= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x) \times \Big(\sin x \cos^{2n-1} x\Big) \,\mathrm{d}x \\
&\quad \begin{cases} u = \sin x \cos^{2n-1} x & u' = \cos^{2n} x - (2n-1)\sin^2 x \cos^{2n-2} x \\ v = x^2 & v' = 2x \end{cases} \\
&= n \left(\Big[x^2 \sin x \cos^{2n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \Big(\cos^{2n} x - (2n-1)\sin^2 x \cos^{2n-2} x \Big) \,\mathrm{d}x \right) \\
&= -n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \,\mathrm{d}x - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \cos^{2n-2} x \,\mathrm{d}x \right) \\
&= -n \left(D_n - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x \,\mathrm{d}x \right) \\
&= -n\Big(D_n - (2n-1)(D_{n-1} - D_n)\Big)
\end{aligned}$$

D'où, en développant,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = (2n-1)\, n\, D_{n-1} - 2n^2 D_n}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Isolons $\dfrac{1}{n^2}$: d'après 3, comme $n^2 \neq 0$,

$$\frac{C_n}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2} - 2D_n$$

Comme $\cos^{2n}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale C_n est non nulle :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{(2n-1)nD_{n-1}}{n^2 C_n} - 2\frac{D_n}{C_n}$$

Le problème est toujours « comment chercher, comment avoir des idées ». Ici, étudions que ce nous avons obtenu naïvement, en ayant toujours écrit bien explicitement en bas du brouillon le but, la formule à montrer. Et cherchons ce qui bloque.

Le morceau « $-2D_n/C_n$ » est parfait. Par contre le premier membre ne convient pas, il nous faudrait du C_{n-1} et non du C_n.

Nous sommes à la question 4 : regardons un peu plus haut si on ne nous donne pas une formule reliant C_n (ce qu'on a) et C_{n-1} (ce qu'on veut).

D'après 2, $\dfrac{C_n}{2n-1} = \dfrac{C_{n-1}}{2n}$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} &= \frac{2n-1}{C_n} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2\frac{D_n}{C_n} \\
&= \frac{2n}{C_{n-1}} \times \frac{nD_{n-1}}{n^2} - 2\frac{D_n}{C_n} \\
&= 2\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2\frac{D_n}{C_n}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)}$$

5) **a)** Posons, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$.

La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition, et $\forall x \in [0, \pi/2]$, $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$.
La fonction cos est continue strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, $\cos 0 = 1 > 2/\pi$ et $\cos \pi/2 = 0 < 2/\pi$. D'où le tableau de signe suivant pour f', qui entraîne le tableau de variation de f :

x	0		α		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Ainsi, $f \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}\, x}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ci-dessus, pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin x$$

D'où, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ *(bien penser à vérifier et signaler que tout est positif)*,

$$x^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x$$

En remplaçant, comme $\cos^{2n} \geqslant 0$ et par croissance de l'intégrale,

$$D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n}\ x,\ \mathrm{d}x$$

Or d'après 2), $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\, \mathrm{d}x = \frac{C_{n-1}}{2n}$, donc en décalant les indices :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}}$$

6) D'après 4), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{D_{k-1}}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_k} \right) \\ &= 2 \left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n} \right) && \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

Or $D_0 = \dfrac{1}{3}[x^3]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi^3}{24}$ et $C_0 = \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$2\frac{D_0}{C_0} = \frac{2\pi^3 \times 2}{24\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'après 5, comme $C_n > 0$ (établi au 4, cos $\geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$),

$$0 \leqslant \frac{D_n}{C_n} \leqslant \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{n+1}$$

Donc, par encadrement, (D_n/C_n) converge vers 0. Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2 (Écoles de commerce)

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

.

b)
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x-1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = o(1)$.
  Donc f est continue en 0.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x-1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x + o(x)$.
  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$.

c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{(e^x-1)^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue en 0, et f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\dfrac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout x dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

2) Variations de f.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc g' est du signe de x et il vient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

b) D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Donc f' est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et f strictement décroissante.

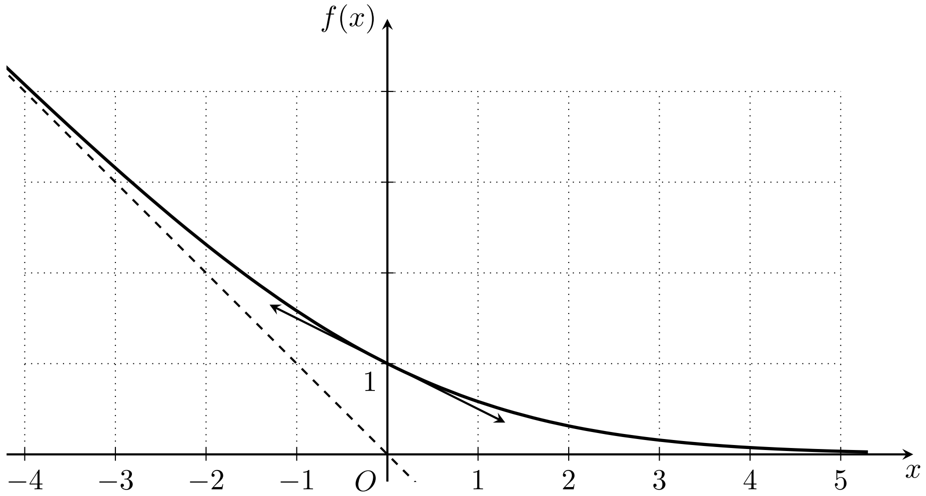
c) <u>Au voisinage de $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc (C) admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.

<u>Au voisinage de $-\infty$</u> : $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus (C) admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

d)



B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

1) Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.
$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \Longleftrightarrow \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \Longleftrightarrow e^\alpha = 2 \Longleftrightarrow \alpha = \ln(2)$$

La fonction f admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

2) **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et φ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par e^x, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

b) Soit $x \in]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$$

c) $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue et dérivable entre u_n et α, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où I est l'intervalle de bornes u_n et α. Puisque $\sup\limits_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f'(x)| = \dfrac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

3) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1 - \alpha|$$

  Et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et la suite (u_n) converge vers $\alpha = \ln 2$.

Exercice 3 (CCINP TSI 2021)

Partie 1 (Étude de la fonction g)

1) Calcul de $g(1)$:

$$g(1) = e^{1\ln 1} = e^0 = 1$$

Dérivabilité de g : La fonction ln est dérivable sur I et l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g : $x \mapsto e^{x\ln x}$ est dérivable sur I produit et composée de fonctions dérivables.

2) Dérivée : posons $u = x\ln x$ pour tout $x \in I$.

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = u'e^u = (\ln x + x \times \frac{1}{x})e^{x\ln x} = (1 + \ln x)e^{x\ln x}$$

Limites : Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Tableau de variation de g :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1 + \ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 1	$\searrow$	$g(e^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

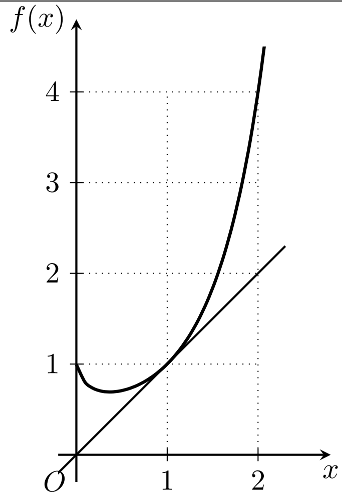
Gardez aussi un tableau de variation au brouillon, où vous placez toutes les informations : par exemple, ici, $x = 1$ et $g(1) = 1$.

3) L'équation de la tangente en $x = a$ est $y = g'(a)(x - a) + g(a)$: c'est la droite de pente $g'(a)$ et qui passe par le point $x = a$, $y = g(a)$.

Donc, ici, d'après ci-dessus, comme $g'(1) = (1 + 0)g(1) = 1$,

$$\boxed{y = x}$$

4) Représentation graphique :



5) D'après le graphique, comme demandé par l'énoncé, $g(e^{-1}) \leqslant g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in]0,1]$.
Le tableau de variations, complété avec la valeur de g en 1 donne ce résultat plus rigoureusement.
De plus, $0 < x \leqslant 1$ entraîne $\ln x \leqslant 0$ puis $0 > x \ln x \geqslant \ln x$. En passant à l'exponentielle, il vient

$$1 > g(x) \geqslant x$$

En particulier, $e^{-1} \leqslant g(e^{-1})$.
En intégrant cet encadrement, il vient

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

Or g n'est ni constante égale à e^{-1}, ni constante égale à 1, donc

$$\boxed{e^{-1} < \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x < 1}$$

Partie 2 (Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$)

1) Calculs d'intégrales.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}}$$

b) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
Si $k = 0$, $h_{n,0}(x) = x^n$ et il n'y a pas de problème de définition en 0. Comme $n > 0$, $h_{n,0}$ se prolonge en 0 par 0.
Si $k > 0$, pour tout $x > 0$,

$$h_{n,k}(x) = (x^{n/k}\ln x)^k$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$ car $\alpha = n/k > 0$. Donc, par composition ($k > 0$),

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln^k x = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } h_{n,k} \text{ est prolongeable par continuité en 0 par 0}}$$

c) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. *C'est un calcul classique, ainsi que le d. La fonction naturelle que l'on sait primitiver, c'est $x \mapsto x^n$.*

Posons : $\begin{cases} u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & u' = x^n \\ v = (\ln x)^k & v' = \dfrac{k}{x}(\ln x)^{k-1} \end{cases}$

L'intégration par parties s'écrit

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^k\right]_0^1 - \frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{D'après b}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k+1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{k-1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{D'après c, car } k+1 \in \mathbb{N}^* \\ &= -\frac{k+1}{n+1} \times (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^{k+1}} \qquad \text{D'après } \mathcal{H}_k \\ &= (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(n+1)^{k+2}}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k \geqslant 0 \quad \int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = (-1)^k\frac{k!}{(n+1)^{k+1}}}$

e) Pour $(n,k) = (0,0)$, $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$, et $(-1)^k \dfrac{k!}{(n+1)^{k+1}} = 1\dfrac{1}{(0+1)^1} = 1$. Ainsi, cette égalité est encore vraie.

2) **a)** Soit $t \in [0,1]$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{t^n}{n!} = 0$, par majoration $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$ puis, par linéarité de la limite,

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^k}{k!}$$

D'après le tableau de variation de la question 1.2 puis la composition par la fonction (croissante) logarithme, ou par une étude directe des variations de $x \mapsto x\ln x$, on obtient

$$\forall x \in]0,1], \quad -1 \leqslant x\ln x \leqslant 0$$

Donc, en posant $t = -x\ln x \in [0,1]$, l'égalité précédente s'écrit

$$\boxed{\forall x \in]0,1], \quad g(x) = e^{-(-x\ln x)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^k}{k!}}$$

b) *Attention ! Attention ! On ne rentre jamais une limite dans une intégrale sans théorème (ou sans justification soigneuse). Cf. le cours sur les suites et séries de fonctions, et ses nombreux exemples.*

Pour tout $x \in]0,1,$ $t = -x \ln x \in [0,1]$ et on peut donc écrire

$$R_n(-x\ln x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x\ln x)^k}{k!}$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 1, il vient, par linéarité de l'intégrale (somme **finie**) :

$$\int_0^1 R_n(-x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^k}{k!}\,\mathrm{d}x$$

L'inégalité donnée par l'énoncé *(conséquence du critère des séries alternées, que l'on verra plus tard)* s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,1], \qquad |R_n(-x\ln x)| \leqslant \frac{(-x\ln x)^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n!}$$

Puis, en utilisant l'inégalité triangulaire dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^1 R_n(-x\ln x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 |R_n(-x\ln x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!} \qquad \textit{Ne garder que ce qui sert} \end{aligned}$$

Ainsi, par majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 R_n(-x\ln x)\,\mathrm{d}x = 0$. Finalement,

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^k}{k!}\,\mathrm{d}x$$

c) D'après 1d et 1e,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 (x\ln x)^k\,\mathrm{d}x = (-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$$

En remplaçant dans l'égalité obtenue au b, il vient

$$\boxed{\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}}$$

Cette égalité s'écrit aussi, en décalant et renommant les indices, $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

Exercice 4 (BECEAS 2021)

1) `Preuve avec la fonction Beta`

a) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} B(n,p) &= \int_0^1 t^n(1-t)^p\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^p\right]_0^1 + \int_0^1 p\frac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{p}{n+1} B(n+1, p-1) \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad B(n,p) = \frac{p!}{(p-k)!}\frac{n!}{(n+k)!} B(n+k, p-k)$$

est vraie pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie, et $k < p$.

$$\begin{aligned} B(n,p) &= \frac{p!}{(p-k)!}\frac{n!}{(n+k)!}B(n+k,p-k) && (\mathcal{H}_k) \\ &= \frac{p!}{(p-k)!}\frac{n!}{(n+k)!}\frac{p-k}{n+k+1}B(n+k+1,p-k-1) && \text{D'après ci-dessus} \\ &= \frac{p!}{(p-k-1)!}\frac{n!}{(n+k+1)!}B(n+k+1,p-k-1) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall k \in [\![0,p]\!] \quad B(n,p) = \dfrac{p!}{(p-k)!}\dfrac{n!}{(n+k)!}B(n+k,p-k)$

En appliquant la relation obtenue pour $k = p$, il vient

$$\boxed{B\left(n,p\right) = \frac{n!\,p!}{(n+p)!}B(n+p,0) = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}}$$

b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} &= \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k \,\mathrm{d}t && \text{(formule du binôme)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{m+k-1}\,\mathrm{d}t && \text{Or } m \geqslant 1 \text{ donc } m+k-1 \geqslant 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k} \end{aligned}$$

2) `Preuve avec des différences finies`

a) Soit $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_{p+k}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}(-1)^{0-k}u_{p+k} = u_p$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (\Delta^{n+1}(u))_p &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta(u)_{p+k} && (\mathcal{H}_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Big(u_{p+k+1} - u_{p+k}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_{p+k+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_{p+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{n-k+1}u_{p+k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k+1}u_{p+k} \\ &= u_{p+n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)(-1)^{n-k+1}u_{p+k}\right] + (-1)^{n+1}u_p \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}u_{p+k} && \text{Formule de Pascal} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}}$

b) D'une part, par récurrence sur n (à faire), on obtient que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta^n(u)_p = \frac{(p-1)!n!}{(p+n)!}(-1)^n.$$

D'autre part, la question (2.a.) donne

$$\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{p+k}.$$

En égalant les deux termes, on obtient l'égalité ($\mathcal{E}$).

FIN DE L'ÉPREUVE