Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Un calcul de $\zeta(2)$)

On pose, pour tout entier naturel n,

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x$$

1) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.
On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

2) Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

3) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)\,n\,D_{n-1} - 2n^2 D_n$.

4) En déduire, pour tout entier n non nul, l'égalité :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right)$$

5) **a)** Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $D_n \leqslant \frac{\pi^2}{4} \frac{C_n}{2n+2}$.

6) Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Dans tout le problème, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthonormé du plan.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

- **a)** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
- **b)** Peut-on déduire du développement limité du a), <u>sans nouveaux calculs</u>, que : (justifier avec soin)
  - f est continue en 0 ?
  - f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
  - f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
- **c)** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.

2) Variations de f.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

- **a)** Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.
- **b)** Donner les variations de f.
- **c)** Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de (C) : montrer en particulier que (C) possède deux asymptotes et préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.
- **d)** Donner l'allure de (C) (faire apparaître les asymptotes et T).

B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.
On considère la suite(u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2)
- **a)** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.
- **b)** Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
- **c)** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.
- **d)** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.

4) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3

On rappelle que, pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$ et on pose $I =]0, +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie 1 (Étude de la fonction g)

1) Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I.

2) Dresser le tableau de variation de g et préciser ses limites aux bornes de I.

3) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ à la courbe représentative de g.

4) Représenter, sur l'intervalle $]0, 2]$, la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente. On donne : $e^{-1} \simeq 0{,}37$ et $g(e^{-1}) \simeq 0{,}69$.

5) En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $e^{-1} < \displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x < 1$.

Partie 2 (Une approximation plus précise de $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$)

1) Calculs d'intégrales.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$.

b) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $h_{n,k} : x \mapsto x^n (\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.
Dans la suite de l'exercice, on notera la fonction prolongée $h_{n,k}$ aussi.

c) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{k-1} \,\mathrm{d}x$$

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire, par récurrence sur k, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 x^n (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = (-1)^k \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$$

e) Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n,k) = (0,0)$.

2) Expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit R_n la fonction définie par

$$\forall t \in [0,1], \qquad R_n(t) = e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}$$

On admet l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \qquad |R_n(t)| \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

a) Justifier que, pour tout $x \in]0,1]$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^k}{k!}$$

b) À l'aide de l'inégalité admise en début de question 2, montrer que

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln x)^k}{k!} \,\mathrm{d}x$$

c) En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

Exercice 4 (Une égalité combinatoire)

Le but de cet exercice est de prouver de deux façons, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'égalité

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{(m-1)!\, n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

1) `Preuve avec la fonction Beta`

On pose, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, $B\,(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t$.

a) Relier, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, les réels $B\,(n,p)$ et $B\,(n+1,p-1)$.
En déduire, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $B\,(n,p) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

b) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité $(\mathcal{E})$.

2) `Preuve avec des différences finies`
On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, associe la suite

$$\Delta(u) := (u_{p+1} - u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}.$$

On note $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta$, etc., et $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}}$.

a) Prouver, pour toute suite $u := (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$(\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

b) En utilisant la suite $u := \left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ établir à nouveau l'égalité $(\mathcal{E})$.

FIN DE L'ÉPREUVE