Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (ATS 2019)

Partie 1 (Étude de fonctions)

1) **a)** Sinus hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \\ &= -\operatorname{sh}(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le sinus hyperbolique est impair}}$

Cosinus hyperbolique : de même,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \\ &= \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le cosinus hyperbolique est pair}}$

b) La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$, donc les fonctions ch et sh sont dérivables, comme composées de fonctions dérivables. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\operatorname{ch}' t = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} t} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{sh}' t = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} t}$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - 2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = 0$$

Donc f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, en $t = 0$, $f(0) = \operatorname{ch}^2(0) = 1$.
En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1}$$

2) Exponentielle étant positive, ch l'est aussi. Donc sh est strictement croissante. Or $\operatorname{sh}(0) = 0$, d'où le tableau de signe de $\operatorname{sh} = \operatorname{ch}'$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}'(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Limites : au voisinage de $+\infty$, $\text{sh}\,(x) \sim \dfrac{1}{2}e^x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}\,(x) = +\infty$. De même pour ch. La parité nous donne les limites en $-\infty$.

3) a) La fonction $(\text{sh}\, -1)$ est strictement croissante, continue, et

$$\lim_{-\infty}(\text{sh}\, -1) = -\infty < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty}(\text{sh}\, -1) = +\infty > 0$$

Donc, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{L'équation sh } t = 1 \text{ admet une unique solution réelle}}$$

b) Par construction, $\text{sh}\ \alpha = 1$, or

$$\text{sh}\ \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1 \Longrightarrow e^{2\alpha} - 1 = 2e^\alpha$$
$$\Longrightarrow \boxed{z^2 - 2z - 1 = 0}$$

c) $\Delta = 4 + 4 = (2\sqrt{2})^2$. Donc

$$z = 1 \pm \sqrt{2}$$

Or $1 - \sqrt{2} < 0$ ($1 < 2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante), et comme $z = e^\alpha > 0$, forcément $z = e^\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

d) *Dans ce genre de question, tout se voit dans le tableau de variations de $f = \text{sh}\, -1$:*

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$\text{ch}\,(x)$					$+$				
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour trouver le signe de $\text{sh}\,(1) - 1$, on utilise la minoration $x \leqslant \text{sh}\,(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}\ x \geqslant 1$. En intégrant cette inégalité entre 0 et $x \geqslant 0$, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sh}\,(x) - \text{sh}\,(0) = \text{sh}\,(x) \geqslant x$$

En particulier $\text{sh}\,(1) - 1 \geqslant 0$.

Soit $f = \text{sh}\, -1$. Cette fonction est strictement croissante, et $f(0) = -1 < 0$, $f(\alpha) = 0$ par construction et $f(1) \geqslant 0$ d'après ci-dessus. Par conséquent,

$$\boxed{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}$$

4) $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, or $\text{sh}(\alpha) = 1$ par construction et $\text{ch} \geqslant 0$, donc

$$\boxed{\text{ch}(\alpha) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}}$$

Partie 2 (Suite d'intégrales)

1) $I_0 = [t]_0^\alpha = \alpha$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\alpha \text{sh}^{2n+2} t - \text{sh}^{2n} t \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\alpha \text{sh}^{2n} t\Big(\text{sh}^2 t - 1\Big) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, \alpha]$. On a $\text{sh}\, t \leqslant 1$ d'après 3)d) et la croissance de sh, et sh $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\text{sh}^2 t \leqslant 1$ puis $\text{sh}^2 t - 1 \leqslant 0$.

Par conséquent, $\text{sh}^{2n} t\Big(\text{sh}^2 t - 1\Big) \leqslant 0$, et par croissance de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n \leqslant 0$$

De plus, la fonction sh^{2n} est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \alpha]$, donc $I_n > 0$. *La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon est positive, non identiquement nulle et d'intégrale nulle : pour prouver $I_n \neq 0$, il faut mentionner la continuité.*

Conclusion :

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et strictement positive}}$$

Ainsi, (I_n) est une suite décroissante minorée, donc

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par partie.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha (\text{sh}^{2n+1} t)(\text{sh}\, t) \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[(\text{sh}^{2n+1} t)(\text{ch}\, t)\Big]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1)(\text{ch}\, t)(\text{sh}^{2n} t)(\text{ch}\, t) \, \mathrm{d}t \\ &= (\text{sh}^{2n+1} \alpha)(\text{ch}\, \alpha) - (2n+1) \int_0^\alpha \text{sh}^{2n} t(1 + \text{sh}^2 t) \, \mathrm{d}t && \text{Car } \text{ch}^2 = 1 + \text{sh}^2 \\ &= \text{ch}\, \alpha - (2n+1)(I_n + I_{n+1}) && \text{Car } \text{sh}(\alpha) = 1 \text{ par construction} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \text{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)}$$

b) D'après la question 4 de la partie 1, $\text{ch}\, \alpha = \sqrt{2}$. Donc l'égalité précédente s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+2)I_{n+1} = \text{ch}\, \alpha - (2n+1)I_n$$

Puis, comme $2n + 2 \neq 0$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n}$$

c) D'après la question 2, (I_n) converge. Notons ℓ sa limite. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'équation du 3)b), il vient $\ell = 0 - \ell$ D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Nous verrons, plus tard dans l'année, que l'on peut aussi déterminer la limite à l'aide du théorème de convergence dominée (chapitre suite et série de fonctions).

Partie 3 (Algorithmique)

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1) Voici deux version, une itérative (boucle **while**), l'autre récursive. La complexité est la même, c'est uniquement une question de rédaction.

Dans tous les cas, le code doit être commenté.

```python
import numpy as np


def fonc(x):
    return np.sinh(x) - 1


def dicho(eps, a=0, b=1, f=fonc):
    """Fonction Dichotomie.
    Keyword arguments:
    eps -- precision
    a   -- borne inferieure de l'intervalle
    b   -- borne superieure de l'intervalle
    f   -- Fonction \`a \'etudier
    """
    #Si la précision est atteinte on retourne (a,b) : condition de sortie.
    if b-a < eps:
        return a, b
    else:
        m = (a + b)/2       #Calcul de m le milieu de [a,b]
        if f(b) * f(m) < 0:
            #Si f(a) et f(m) sont de même signe on remplace a par m
            return dicho(eps, m, b)
        else:
            #Sinon on remplace b par m car x appartient à [a,m]
            return dicho(eps, a, m)
```

```python
def dicho(eps, a=0, b=1, f=fonc):
    """Fonction Dichotomie.
    Keyword arguments:
    eps -- precision
    a   -- borne inferieure de l'intervalle
    b   -- borne superieure de l'intervalle
    f   -- Fonction \`a \'etudier
    """
    #Si la précision n'est pas atteinte, on continue le calcul.
    while b-a > eps:
        m = (a + b)/2       #Calcul de m le milieu de [a,b]
        if f(b) * f(m) < 0:
            #Si f(a) et f(m) sont de même signe on remplace a par m
            a = m
        else:
            #Sinon on remplace b par m car x appartient à [a,m]
            b = m
    #Si on sort de la boucle, la précision est atteinte : on retourne (a,b)
    return a, b
```

2) Approche descendante, ou *top-down* : on part de I_n et on descend à travers les appels récursifs jusqu'à I_0.

```python
1 def I(n):
2     if n == 0:
3         return alpha
4     else:
5         return np.sqrt(2)/(2*n+2) - (2*n+1)/(2*n+2) * I(n-1)
```

Ligne 2 : condition de sortie. Ligne 5 : appel récursif, `n` diminue strictement (variant de boucle).
Approche ascendante, ou *bottom-up* : on part de I_0 et on monte jusqu'à I_n. (fonction itérative).

```python
1 def I(n):
2     res = alpha
3     for i in range(1, n+1):
4         res = np.sqrt(2)/(2*i+2) - (2*i+1)/(2*i+2) * res
5     return res
```

Ligne 2 : initialisation de la variable `res` qui contiendra I_n pendant la boucle.
Ligne 3 : `i` est l'indice courant : à la ligne 4, `res` contient I_i.

Exercice 2 (E3A PSI 2019)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$$

Donc (u_n) est croissante.
<u>Montrons que (u_n) n'est pas majorée</u> : Supposons (u_n) majorée. Alors, elle est croissante majorée, donc convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En passant à la limite dans la relation de convergence, il vient

$$\ell = \ell + \ell^2$$

Et donc $\ell = 0$. Or (u_n) est croissante : $0 = \ell \geqslant u_0 = a > 0$. C'est absurde.
Conclusion : (u_n) est non majorée.

Déterminons la limite de (u_n) : Comme (u_n) est croissante non majorée, alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2) **a)** Montrons que (v_n) est strictement croissante :
$u_0 > 0$ et (u_n) croissante donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n + u_n^2) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n + u_n^2) - \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n^2) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Or $1 + \dfrac{1}{u_n} > 1$, donc, par stricte croissance du logarithme, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) > 0$.
Conclusion : (v_n) est strictement croissante. En particulier, $v_{k+1} - v_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Encadrement : Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. D'après le calcul ci-dessus,

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right)$$

Or (u_n) est croissante d'après 1, donc $(1/u_n)$ décroissante, et par croissance du logarithme,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$$

Mais comment avoir l'idée de faire tout ça ? Parce qu'on ne pense pas à tout d'un seul coup. D'abord, on écrit $v_{n+p+1} - v_{n+p}$, et évidemment le but. En fait, $v_{k+1} - v_k$, pour alléger. Et là, on remarque qu'il ne manque presque rien : $\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$. Ordonner du u_n et du u_{n+p}, c'est une question de monotonie : la question est terminée.

b) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. En sommant les inégalités ci-dessus entre $p = 0$ et $p = k$, il vient

$$0 < \sum_{p=1}^{k} v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

On reconnaît une somme télescopique, et une somme géométrique : $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{1 - 1/2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$$

Du $v_{k+1} - v_k$? C'est télescopique ! Même idée : on **écrit**, *en remplaçant les formules par leurs expressions. Et on écrit le but à atteindre.*

c) D'après la question a), (v_n) est croissante. Montrons qu'elle est majorée.
Posons $n = 0$ dans l'encadrement précédent. Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < v_{k+1} - v_0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

Donc la suite (v_n) est majorée par $M = \ln(1 + 1/u_0) + v_0$.
Conclusion : la suite (v_n) est croissante majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge vers une limite } L}$$

En fait, si vous lisez bien la question, il y a marqué « montrez que (v_n) est majorée ». Et vu que c'est la dernière question de la question 2), il y a aussi implicitement marqué « à l'aide du b et éventuellement du a ».

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans l'encadrement obtenu au 2)b), il vient

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \quad & L - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
0 \leqslant & 2^n L - \ln(u_n) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) && \text{Par définition de } v_n \\
1 = e^0 \leqslant \quad & e^{2^n L - \ln(u_n)} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n} && \text{Par croissance de l'exponentielle} \\
1 \leqslant \quad & \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}
\end{aligned}$$

D'après 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n}{u_n} = 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n}$$

4) a) Comme $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ et $t_{n+1} = e^{2^n L \times 2} = t_n^2$,

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= t_{n+1} - u_{n+1} \\
&= t_n^2 - u_n - u_n^2 \\
&= (s_n + u_n)^2 - u_n - u_n^2 && \text{Car } t_n = s_n + u_n \\
&= s_n^2 + 2 s_n u_n - u_n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{s_{n+1} = s_n^2 + 2 s_n u_n - u_n}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Au 3), nous avons prouvé que

$$1 \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

Comme $u_n > 0$, il vient

$$u_n \leqslant t_n \leqslant 1 + u_n$$

Or $s_n = t_n - u_n$, donc cet encadrement s'écrit

$$0 \leqslant s_n \leqslant 1$$

Conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (s_n) \text{ est bornée, comprise entre 0 et 1}}$$

c) *Indication implicite : 4a n'a pas servi.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 4a, $s_{n+1} = s_n^2 + (2s_n - 1)u_n$. Comme $u_n > 0$, il vient

$$2s_n - 1 = \frac{s_{n+1} - s_n^2}{u_n}$$

Puis, comme (s_n) est comprise entre 0 et 1 d'après b,

$$|2s_n - 1| \leqslant \frac{|s_{n+1}| + |s_n^2|}{u_n} \leqslant \frac{2}{u_n}$$

D'où, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{2}$. C'est-à-dire $s_n = \dfrac{1}{2} + o(1)$. En conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)}$$

Exercice 3 (CAPES 2019)

1) Pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers termes de la série géométrique de raison $-x \neq 1$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}}$$

2) Soit $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant entre 0 et x l'égalité précédente, il vient

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

Or $1+t > 0$ entre 0 et $x > -1$, donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln(1+x) - \ln 1$ puis par linéarité de l'intégrale

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t}$$

3) Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_0^x \left| \frac{t^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t && \text{Car } x \geqslant 0 \\
&\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t && \text{Car } t \geqslant 0 \\
&\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1+0} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x && \text{Car } t \geqslant 0 \\
&\leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité triangulaire sur les intégrales, aussi appelée l'inégalité de la moyenne. Mais pourquoi nous précise-t-on que $x \geqslant 0$? Ah ! Attention : est-ce que 0 et x, les bornes, sont dans le bon ordre ?
Puis on majore dans ce qui nous empêche de calculer tranquillement l'intégrale : le dénominateur — les fractions, c'est le Mal.

Conclusion :

$$\boxed{\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

4) Soit $x \in]-1, 0]$.

$$\begin{aligned}
\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{|1+t|} \, \mathrm{d}t && \text{Car } x \leqslant 0 \\
&\leqslant \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+x} \, \mathrm{d}t && \text{Car } 1+t \geqslant 1+x > 0
\end{aligned}$$

Or

$$\int_x^0 |t|^n \, \mathrm{d}t = \int_0^{|x|} t^n \, \mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}}$$

5) D'après la question 2), pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or d'après, respectivement, les questions 3 et 4,

$$\begin{array}{lll} \forall x \in [0,1[, & \left|(-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \forall x \in]-1,0], & \left|(-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x} \times \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} & \leqslant \dfrac{1}{(x+1)(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-1,1[$, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[\text{, la série } \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ est convergente de somme } \ln(1+x).}$$

6) Soit $|x| > 1$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} = +\infty$. Donc le terme général $\left((-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ ne tend pas vers 0 :

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ diverge grossièrement lorsque } |x| > 1}$$

7) D'après la question 2), pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

À l'aide de la question 3), on en déduit la majoration, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant x^{n+1}$$

Il suffit donc de trouver n tel que $x^{n+1} \leqslant 10^{-8}$ ou $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant 10^{-8}$.

a) <u>Cas $x = \dfrac{1}{3}$</u> : Cherchons n tel que $x^{n+1} \leqslant 10^{-8}$. Comme $x > 0$, on prend le logarithme :

$$(n+1)\ln x \leqslant -8\ln 10$$

D'où $n \geqslant -1 - 8\dfrac{\ln 10}{\ln x}$. Conclusion :

$$\boxed{n = \left\lfloor \frac{8\ln 10}{\ln 3} \right\rfloor \text{ convient}}$$

b) <u>Cas $x = \dfrac{1}{8}$</u> : De même, en remplaçant $\ln 3$ par $\ln 8 = 2\ln 2$,

$$\boxed{n = \left\lfloor \frac{4\ln 10}{\ln 2} \right\rfloor \text{ convient}}$$

c) <u>Cas $x = 1$</u> : La majoration obtenue en début de question s'écrit

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On cherche donc à majorer $\dfrac{1}{n+1}$ par 10^{-8}, d'où

$$\boxed{n = -1 + 10^8 \text{ convient}}$$

$n_{1/3} = 16$ (ou même $n_{0,99} = 1832$), alors que $n_1 = 100000001$: une convergence géométrique est beaucoup plus rapide qu'une convergence polynomiale.

8) Le cas de $\ln 2$.

a) D'après les questions 2 et 3, avec un calcul déjà détaillé à la question 7c,

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, par encadrement, $\sum(-1)^k \dfrac{1}{k+1}$ converge vers $\ln 2$:

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette suite converge d'après 8a, et $R_p = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ par définition.

Donc toute suite extraite de (U_n) converge vers R_p, en particulier (U_{2N}) : pour tout $N > p$,

$$\begin{aligned}
U_{2N+2} &= \sum_{k=2p+1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \sum_{k=p}^{N} \frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1} + \sum_{k=p+1}^{N+1} \frac{(-1)^{(2k)+1}}{2k} && \text{Séparation des } k \text{ pairs et impairs} \\
&= \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=p}^{N} \frac{-1}{2k+2} && \text{Ré-indexation de la seconde somme} \\
&= \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)
\end{aligned}$$

On ajuste avec les premiers termes des sommes, et au besoin on écrit avec des pointillés au brouillon.

En remarquant que $\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2} = \dfrac{2k+2-(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)}$, et en passant à la limite $N \to +\infty$, il vient

$$\boxed{R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}$$

c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $k \geqslant 0$, $\dfrac{1}{k+2} \leqslant \dfrac{1}{k+1}$. D'où

$$\frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Puis, pour tout p tel que $0 < p \leqslant N$, en sommant entre $k = p$ et $k = N$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}}$$

d) *Cet encadrement est la classique comparaison série/intégrale dans le cas d'un fonction décroissante sur* $[0, +\infty[$*, vu à l'exercice 3 de la feuille sur les séries numériques, et plus tard dans le chapitre d'intégration. Un* **classique***.*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+a)^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ $(a > 0)$ donc

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1], & f(k+1) &\leqslant f(t) \leqslant f(k)\\
\Longrightarrow\ &\forall k \in \mathbb{N}^*, & f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)\\
\Longrightarrow\ &\forall p \in [\![0, N]\!], & \sum_{k=p}^{N} f(k+1) &\leqslant \sum_{k=p}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{N} f(k)\\
\Longrightarrow\ &\forall p \in [\![0, N]\!], & \sum_{k=p+1}^{N+1} f(k) &\leqslant \int_p^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{N} f(k)
\end{aligned}$$

En décalant les variables p et N, la première inégalité s'écrit

$$\forall p \in [\![1, N]\!], \qquad \sum_{k=p}^{N} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où l'encadrement, pour tout $p \in [\![1, N]\!]$,

$$\int_p^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{N} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire, pour tout p tel que $0 < p \leqslant N$,

$$\boxed{\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}}$$

e) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comme, avec $0 < c < d$, *(On vérifie ses primitives : $F' = f$?)*

$$\int_c^d \frac{1}{(2x+a)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2(2x+a)}\right]_c^d = \frac{1}{2(2c+a)} - \frac{1}{2(2d+a)}$$

Or d'après les questions c) et d), avec $a = 2$ et $a = 1$ respectivement $(a > 0)$,

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}$$

D'où

$$\frac{1}{2(2p+2)} - \frac{1}{2(2N+2+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \frac{1}{2(2p-2+1)} - \frac{1}{2(2N+1)}$$

Or, d'après la question b),

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

Donc, en passant à la limite quand $N \to +\infty$,

$$\boxed{\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}}$$

f) *Cette question était faisable même sans avoir fait celles qui précèdent. C'est exactement le modèle de l'exercice « équivalent de (x_n) sachant que $n\pi \leqslant x_n \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2}$ ». Et en plus, on vous donne la solution.*

Pour $p > 0$, $4p > 0$ donc l'encadrement précédent nous donne

$$\frac{4p}{4p+4} \leqslant \frac{R_p}{\frac{1}{4p}} \leqslant \frac{4p}{4p-2}$$

Or $\frac{4p}{4p+4} \sim 1$ et $\frac{4p}{4p-2} \sim 1$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{R_p}{\frac{1}{4p}} = 1$. Conclusion :

$$\boxed{R_p \sim \frac{1}{4p}}$$

9) Lors de la question 7b, nous avons trouvé $n_{1/8} = \left\lfloor \frac{4\ln 10}{\ln 2} \right\rfloor$ et la valeur approchée de $\ln 8 = 2\ln 2$ suivante :

$$\sum_{k=0}^{n_{1/8}-1} (-1)^k \frac{1}{(k+1)8^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n_{1/8}} (-1)^{k+1} \frac{1}{k8^k}$$

Finalement, il suffit donc de diviser par 2 pour obtenir

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_{1/8}} (-1)^{k+1} \frac{1}{k8^k} \text{ est une valeur approchée à } 10^{-8} \text{ de } \ln 2}$$

10) Soit $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 2) en $x > -1$ et en $-x > -1$,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{2n} \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
\ln(1-x) &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + (-1)^{2n} \int_0^{-x} \frac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} -\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-u)^{2n}}{1-u}(-1)\,\mathrm{d}u \qquad \text{Avec le changement de variable } u = -t \\
&= -\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \left[(-1)^k + 1\right] \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^{2n}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + 2\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}$$

11) Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 10, comme $x \geqslant 0$ et $\dfrac{t^{2n}}{1-t^2} \geqslant 0$ sur $[0,x]$,

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| = \left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, sur $[0,x] \subset [0,1[$, $0 < 1-x^2 \leqslant 1-t^2$. D'où la majoration

$$\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

12) **a)** $x = \dfrac{1}{3}$ nous donne

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1/x+1}{1/x-1}\right) = \ln\left(\frac{3+1}{3-1}\right) = \ln 2$$

Conclusion : $\boxed{x = \dfrac{1}{3} \text{ convient}}$

b) La majoration de la question 11 nous donne, avec $x = \dfrac{1}{3}$,

$$\left|\ln 2 - 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{2}{1-x^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{9}{4}x^{2n+1}$$

Nous cherchons donc n tel que $\dfrac{9}{4}x^{2n+1} \leqslant 10^{-8}$, d'où

$$\begin{aligned} x^{2n+1} &\leqslant \frac{4}{9}10^{-8} \\ \Longrightarrow 2n+1 &\geqslant \frac{\ln(4/9) - 8\ln(10)}{\ln x} = \frac{8\ln 10 - 2\ln 2 + 3\ln 3}{\ln 3} \\ \Longrightarrow \qquad n &\geqslant \frac{8\ln 10 - 2\ln 2}{2\ln 3} + 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{n = 2 + \left\lfloor \frac{4\ln 10 - \ln 2}{\ln 3} \right\rfloor}$$

c) D'un point de vue complexité en temps de calcul, dans les deux cas on somme n termes. Dans la seconde méthode, on ne somme que des puissances impaires, donc la série *à x identique* converge plus rapidement.

Mais dans un cas, on prends $x = \dfrac{1}{3}$, donc la majoration de l'erreur est en

$$\frac{2}{1-x^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{3}{8}\frac{1}{n9^n}$$

Alors que dans celle de la question 9, $x = \dfrac{1}{8}$, et la majoration de l'erreur est en

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{8} \times \frac{1}{n8^n}$$

La seconde méthode est donc légèrement meilleure.

13) **a)** Tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$ se décompose en facteurs premiers : si on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et $v_p(n)$ la valuation de p dans n, alors

$$n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(n)}$$

D'où $\boxed{\ln n = \sum_{p \in \mathscr{P}} v_p(n) \ln p}$

b) Il suffit donc de calculer les valeurs approchées des $\ln p$ pour p premier plus petit que 20, c'est-à-dire $\boxed{p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}}$