Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie 1 (Étude de fonctions)

1) **a)** Étudier la parité des fonctions ch et sh.

b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et déterminez leurs dérivées.

c) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\text{ch } t)^2 - (\text{sh } t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\text{ch } t)^2$ et $(\text{sh } t)^2$.

2) Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.

3) **a)** En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\text{sh } t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.

b) On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

c) En déduire la valeur exacte de α.

d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

4) Montrer que, $\text{ch}\,(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie 2 (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha (\text{sh } t)^{2n} \, \mathrm{d}t$.

1) Déterminer I_0.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0, \alpha]$, *on a* $0 \leqslant \text{sh } t \leqslant 1$). En déduire qu'elle est convergente.

3) **a)** En remarquant que $(\text{sh } t)^{2n+2} = (\text{sh } t)^{2n+1} \, \text{sh } t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \text{ch}\,(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.

c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie 3 (Algorithmique)
Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1) On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\operatorname{sh}(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Écrire une fonction python `dicho(eps)`, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b - a \leqslant \varepsilon$. *Note : la fonction* sh *s'écrit* `sinh` *en Python.*

2) En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve 0,881 comme valeur approchée de α. Écrire une fonction, en *Python*, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie une valeur approchée de I_n.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1) En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

2) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

a) Prouver que l'on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$

b) En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3) On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4) On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.

c) Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de calculer de façon approchée des valeurs du logarithme népérien.

1) Montrer que, pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

2) En déduire que, pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3) On suppose $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

4) On suppose que $x \in]-1, 0]$. Montrer que

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

5) En déduire que, si $x \in]-1,1[$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente de somme $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

6) Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

7) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

a) $x = \dfrac{1}{3}$

b) $x = \dfrac{1}{8}$

c) $x = 1$

On ne demande pas forcément que le n trouvé soit optimal.

8) Le cas de $\ln 2$.

a) Justifier

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$R_p = \sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Montrer que

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout p tel que $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

d) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout p tel que $0 < p \leqslant N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}$$

e) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}$$

f) Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

9) Déterminer une valeur approchée de $\ln 2$ à l'aide de la valeur approchée déterminée à la question 7b. Donner la précision de ce résultat.

10) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} \, \mathrm{d}t$$

11) En déduire que si $x \in [0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

12) **a)** Quelle valeur de x peut-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$?

b) À l'aide de cette valeur de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$ à au moins 10^{-8} près.

c) Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ avec celle de la question 9

13) On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

a) Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.

b) Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

FIN DE L'ÉPREUVE