Épreuve de Mathématiques 1

Correction

3

Exercice 1 (ESC Chambéry, ECT)

1) **a)** Le calcul nous donne $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

b) Pour tout entier $k \geqslant 3$, $B^k = B^3 B^{k-3} = 0.B^{k-3} = 0$.

2) $A = 3I_3 + B$. Or I_3 et B **commutent**, donc on peut écrire la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_3 + B)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k && (B^k = 0 \text{ si } k \geqslant 3) \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \\ A^n &= 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $A^0 = I_3$, la formule est vraie ; et si $n = 1$, on retrouve aussi la bonne formule, puisque le terme en $n(n-1)$ s'annule.

3) **a)** On trouve la relation de récurrence suivante : $X_{n+1} = AX_n$. La récurrence est laissée en exercice au lecteur (mais il faut la faire ! puisqu'elle est demandée).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) X_0 \\ \text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= 3^n \left(X_0 + \frac{n}{3} B X_0 + \frac{n(n-1)}{18} B^2 X_0 \right) = 3^n \begin{pmatrix} 2 + 2n/3 \\ 1 + 2n/3 + n(n-1)/9 \\ -2n/3 - n(n-1)/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

- $u_n = 3^n(2 + 2n/3)$ et a pour limite $+\infty$;
- $v_n = 3^n(1 + 2n/3 + n(n-1)/9)$ et a pour limite $+\infty$;
- $w_n = 3^n(-2n/3 - n(n-1)/9)$ et a pour limite $-\infty$.

Exercice 2 (CAPES)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) a) Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\int$ et $\mathrm{d}t$.

Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

Conclusion : $\boxed{W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t}$

b) $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).
Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big) \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \frac{\pi}{2}.}$

2) a) Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\dfrac{1}{W_{n-1}} = \dfrac{2}{\pi}nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi}nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi}nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}}e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}e$$

Donc $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}e\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.

Un peu de tactique : si on vous le demande à l'ordre 3, c'est sans doute qu'il sert à l'ordre 3. Et non 2.

d) Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1 \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)+1 \\
&= -1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+1+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= -\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{12n^2}+o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$

e) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

f) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1$.

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^\ell > 0$.

Comme $K > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

2) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p) : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} && \text{(d'après 1)c))}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim K p^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K 2p^{2p} e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling. *Elle est à votre programme : le résultat est du cours.*

Exercice 3 (PT 2014 C, partiel)

Partie 1

Certes vous rentrez de vacances. Certes, c'est le troisième exercice. Mais vous devez savoir faire les deux premières questions. Même fatigué.

1) a) La fonction R_n est dérivable car composée de fonctions dérivables.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad R_n'(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{kt^{k-1}}{k!} = e^t - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = e^t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = R_n(t) + \frac{t^n}{n!}$$

Ainsi, $\boxed{R_n \text{ est une solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!}}$

b) La solution générale sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E}_0)$ est $\boxed{t \mapsto \lambda e^t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

c) Méthode de variation de la constante. Soit $y(t) = \lambda(t)e^t$ une solution de $(\mathcal{E})$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathcal{E}) &\iff \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = \frac{t^n}{n!} \\ &\iff \lambda'(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-t} \\ &\iff \lambda(t) - \lambda(0) = \int_0^t \frac{u^n}{n!}e^{-u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Donc les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\boxed{y(t) = \lambda e^t + e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!}e^{-u}\,\mathrm{d}u}$$

d) R_n est la solution de $(\mathcal{E})$ pour la condition initiale $y(0) = R_n(0) = 1 - 1 = 0$.
Par unicité de la solution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale, $R_n = y$ avec $y(0) = 0 = \lambda + 0$. En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad R_n(t) = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!}e^{-u}\,\mathrm{d}u}$$

e) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme, pour tout $u \in [0,t]$, $0 \leqslant u \leqslant t$, tout est positif et il vient

$$|R_n(t)| = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

De plus, pour tout $u \in [0,t]$, $e^{-u} \leqslant 1$, donc

$$|R_n(t)| \leqslant e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!}\,\mathrm{d}u = \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad |R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}}$$

Pour obtenir une majoration d'intégrale, on commence par rentrer les valeurs absolues dans l'intégrale (ici tout est positif, donc il n'y a rien à faire), puis on majore dans l'intégrale un des morceaux qui nous gène pour le calcul.

f) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après e),
$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$
On veut montrer que le majorant tend vers 0. Qualitativement, c'est la factorielle qui l'emporte. On garde donc un bout de factorielle $(n+1)$ pour tendre vers 0, et on étudie ce qui reste $(t^{n+1}/n!)$. Borné suffira.

Posons $u_n = \dfrac{t^{n+1}}{n!}$ pour $t \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{t^{n+1}(n-1)!}{n!t^n} = \frac{t}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Donc à partir d'un certain rang n_0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. Puis, toujours pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}$.
Ainsi,
$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}u_n \leqslant \frac{1}{n+1}u_{n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Finalement, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$. Ce qui s'écrit aussi
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}}$$

2) **a)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)!(n+1)n} < 0$$
donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$

b) D'après a), (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et de plus
$$v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc $\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$
Par conséquent d'après le théorème des suites adjacentes,
$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite } \ell}$$
De plus, d'après la question 1)f) pour $t = 1$, (u_n) converge vers $e^1 = e$. Ainsi,
$$\boxed{\ell = e}$$

c) Comme (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$.
De même, (v_n) strictement décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e < v_n$. En conclusion,
$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < e < v_q}$$

d) Pour tout $k \in [\![0,q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, donc $N_q = q!u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

En multipliant l'encadrement du c) par $q!$ et en remplaçant e par $\dfrac{p}{q}$: $\qquad N_q < (q-1)!p < N_q + \dfrac{1}{q}$
Or dans les entiers, $a < b$ entraîne $a + 1 \leqslant b$, ainsi l'encadrement s'écrit
$$N_q + 1 \leqslant (q-1)!p < N_q + \underbrace{\frac{1}{q}}_{\leqslant 1} \leqslant N_q + 1$$
Ce qui est absurde : par conséquent, $\boxed{e \text{ est irrationnel}}$

Partie 2 **1)** Continuité, dérivabilité :

La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$.

En 0, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0.

De plus $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

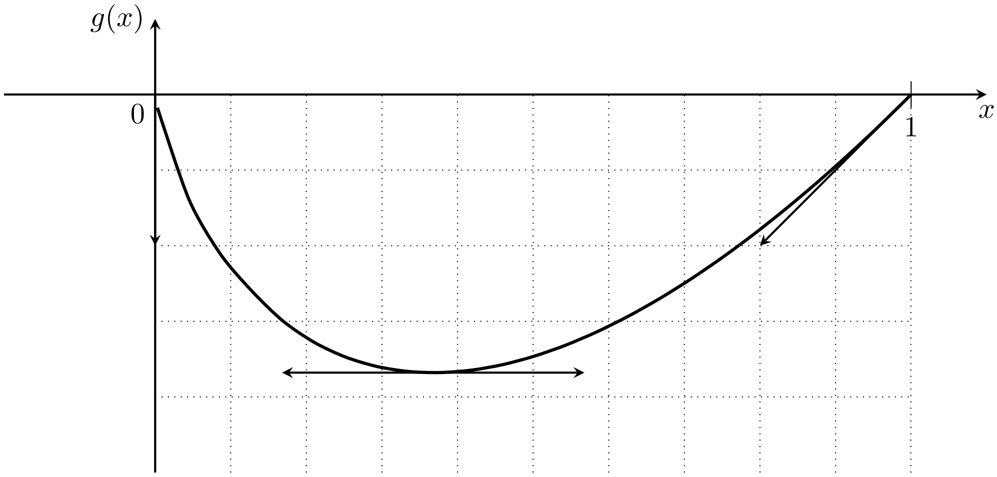
En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1] \text{ mais pas en } 0.}$

De plus, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente verticale en 0.

Variations : Pour tout $x \in]0,1]$, $g'(x) = (\ln x) + 1$.

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	1
g	0 ↘		$-e^{-1}$	↗	0

Pour vérifier vos calculs, par exemple le signe de la dérivée : tester quelques valeurs, par exemple ici $x = 1$ (qui sert pour tracer la courbe, en plus).



2) D'après le tableau de variation précédent, $\inf\limits_{x\in[0,1]} g(x) = -e^{-1}$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x) = 0$.

Donc $\boxed{M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| \text{ existe et } M = \max\left(\left|\inf\limits_{x\in[0,1]} g(x)\right|, \left|\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x)\right|\right) = e^{-1}}$

Si on ne nous demandais pas la valeur du maximum, nous aurions pu nous contenter d'appliquer le théorème « $|g|$ continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes ».

3) Comme g est décroissante sur $[0,e^{-1}]$, $-g$ est croissante sur cet intervalle.

Montrons que, sur $]0,e^{-1}]$, $x \leqslant -g(x)$:

Soit $h(x) = x + g(x)$, h est dérivable sur $]0,1]$ d'après 1) et $h'(x) = 1 + g'(x) = 2 + \ln x$. D'où le tableau

- $\lim\limits_{0^+} h = 0$
- $h(e^{-1}) = 0$

x	0		e^{-2}		e^{-1}
$h'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	1
h	0 ↘			↗	0

Donc $\forall x \in]0,e^{-1}]$, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -g(x)$.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: D'après ci-dessus, $x \leqslant -g(x)$ sur $]0, e^{-1}]$ donc en particulier pour t_0. Ainsi $t_0 \leqslant -g(t_0) = t_1$. De plus, d'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [0,1]$, $-g(x) \leqslant e^{-1}$. Donc $t_1 \leqslant e^{-1}$. Finalement : $t_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant e^{-1}$, et $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$

$$\begin{array}{lcl} \Longrightarrow & -g(t_0) \leqslant -g(t_n) \leqslant -g(t_{n+1}) \leqslant -g(e^{-1}) & \text{(en appliquant } -g\text{, croissante sur }]0, e^{-1}]) \\ \Longrightarrow & t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & \\ \Longrightarrow & t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & (\mathcal{H}_0) \end{array}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}}$

4) La fonction g' est dérivable sur $I = [t_0, e^{-1}] \subset \mathbb{R}_+^*$, et $g''(x) = \dfrac{1}{x}$. Cette fonction vérifie l'encadrement

$$\forall u \in I \qquad 0 < g''(u) \leqslant \frac{1}{t_0}$$

Soit $x \in [t_0, e^{-1}]$ fixé. En intégrant cet encadrement entre x et e^{-1} ($x \leqslant e^{-1}$), il vient

$$0 \leqslant \int_x^{e^{-1}} g''(u)\,\mathrm{d}u = g'(e^{-1}) - g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Or $g'(e^{-1}) = 0$ donc

$$\boxed{0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)}$$

Puis en intégrant de nouveau entre x et e^{-1}

$$0 \leqslant -g(e^{-1}) + g(x) = \int_x^{e^{-1}} -g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{e^{-1}} \frac{1}{t_0}(e^{-1} - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\left[\frac{(e^{-1} - t)^2}{2}\right]_x^{e^{-1}} = \frac{(e^{-1} - x)^2}{2t_0}$$

Donc, en prenant des valeurs absolues :

$$\boxed{|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), $t_n \in I = [t_0, e^{-1}]$. Donc, d'après 4), avec $x = t_n$,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est immédiate.

- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après ci-dessus,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{(t_n - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = \frac{(2t_0)^2}{2t_0}\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^n\times 2} = 2t_0\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^n}}$

6) Comme $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, $|t_0 - e^{-1}| \leqslant \frac{2}{3}e^{-1} \leqslant e^{-1} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}-t_0}{2t_0}\right)^{2^n} = 0$.

D'après 5), par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n - e^{-1}|$ existe et égal 0.

En conclusion $\boxed{\text{La suite } (t_n)_n \text{ converge vers } e^{-1}}$

FIN DE L'ÉPREUVE