Épreuve de Mathématiques 1

Durée 3 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3$$

1) **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.

2) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en justifiant son utilisation, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$A^n = 3^n \left(I_3 + \dfrac{n}{3}B + \dfrac{n(n-1)}{18}B^2 \right)$. Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

3) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \qquad v_{n+1} = u_n + 3v_n, \qquad w_{n+1} = -u_n + 3w_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

b) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n et w_n en fonctions de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

(cette question est indépendante des suivantes).

b) Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

Rappel : $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

d) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

2) **a)** Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

b) En déduire un équivalent de W_n.

B. Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$.

1) **a)** Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) Exprimer simplement v_n en fonction de n.

c) Rappeler le développement limité de $\ln(1-u)$ à l'ordre 3 en $u = 0$.

d) Donner un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_n$.

e) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.

f) En déduire que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

2) **a)** En utilisant la question A1)c), montrer que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. En déduire W_{2p+1} en fonction de p.

b) Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$ à l'aide de l'équivalent de $n!$ trouvé précédemment.

c) En déduire la valeur de K, et, par suite, un équivalent de $n!$.

Exercice 3

Partie 1

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

1) **a)** Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (\mathcal{E})$$

b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

c) Résoudre $(\mathcal{E})$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.

e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

f) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$. Ce résultat doit être justifié à l'aide des questions qui précèdent.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent, et déterminer leur limite.

c) En déduire que, pour tout entier naturel q non nul,

$$u_q < e < v_q$$

d) On cherche à montrer que e est irrationnel. À cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e.

Partie 2

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x \ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction g sur $[0,1]$, puis tracer sa courbe représentative.

2) En déduire que $M = \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3) On définit la suite $(t_n)_n$ par $t_0 \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

4) Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$:

$$0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Puis que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5) En déduire que, pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

6) Quelle est la limite de la suite $(t_n)_n$?

FIN DE L'ÉPREUVE