Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 4 septembre 2017

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

---2

Exercice 1

1) a) *Remarque préliminaire : j est une racine 3-ième de l'unité, c'est-à-dire une solution de $X^3 = 1$ ($\boxed{j^3 = 1}$). Cette équation s'écrit aussi $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = 0$. Puisque $j \neq 1$, j est forcément racine de $X^2 + X + 1$ (pour que le produit soit nul) : $\boxed{j^2 + j + 1 = 0}$.* Soit $p \in \mathbb{N}$.

- $\underline{k = 3p}$: $j^k = (j^3)^p = 1$ donc $S(3p) = 3$.
- $\underline{k = 3p+1}$: $S(3p+1) = 1 + (j^3)^p j + (j^3)^{2p} j^2 = 1 + j + j^2 = 0$.
- $\underline{k = 3p+2}$: $S(3p+2) = 1 + (j^3)^p j^2 + (j^3)^{2p} j^4 = 1 + j^2 + j^3 j = 1 + j^2 + j = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad S(3p) = 3 \text{ et } S(3p+1) = S(3p+2) = 0}$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k j^k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k (j^2)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 + j^k + (j^2)^k\right) X^k$$

On pose $N = E(n/3)$, la partie entière de $n/3$ (donc $n = 3N$, $n = 3N+1$ ou $n = 3N+2$). D'après le résultat de la question 1)a), $\boxed{P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k S(k) X^k = \sum_{p=0}^{N} 3a_{3p} X^{3p}}$.

2) a) $R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k) = X^3 - k(1+j+j^2)X^2 + k^2(1+j+j^2)X - k^3 = X^3 - k^3$
(Sans calculs : les racines de $R_k(X)$ sont k, jk et j^2k, c'est-à-dire exactement les solutions de $X^3 = k^3$, donc $R_k(X) = \alpha(X^3 - k^3)$.)

b) $T = R_1R_2R_3R_4$, où R_k est le polynôme de la question précédente. Comme R_k est un polynôme en X^3, $\boxed{T \text{ est un polynôme en } X^3}$.
Surtout, éviter de développer le polynôme T de degré 12...

c) $T = R_1R_2R_3R_4$ donc $T(X) = (X^3-1)(X^3-2^3)(X^3-3^3)(X^3-4^3)$.
Ainsi, avec $\boxed{H(Y) = (Y-1)(Y-2^3)(Y-3^3)(Y-4^3)}$, $H(X^3) = T(X)$.
Les racines de H sont 1, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $4^3 = 8^2 = 64$.

d) Méthode directe :

$$\begin{aligned} T(X) = 0 &\iff Q(X) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(jX) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(j^2X) = 0 \\ &\iff X = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad jX = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad j^2X = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$, et $\dfrac{1}{j^2} = j$, donc en divisant par j et par j^2 les équations ci-dessus, on trouve que les racines de T sont

$$\boxed{\{1, 2, 3, 4, j^2, 2j^2, 3j^2, 4j^2, j, 2j, 3j, 4j\}}$$

Seconde méthode : D'après 2)c), $T(X) = H(X^3)$, donc

$$T(X) = 0 \iff H(X^3) = 0 \iff X^3 = 1, 2^3, 3^3 \text{ ou } 4^3$$

En résolvant chacune des équations $X^3 = a$ ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\{1, j, j^2, 2, 2j, 2j^2, 3, 3j, 3j^2, 4, 4j, 4j^2\}}$$

Exercice 2 (EDHEC S 2013)

1) **a)** *On peut mettre au même dénominateur et identifier les coefficients du numérateur. Je présente une autre méthode.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta}{X+1}$. Donc

$$\frac{1}{X+1} = \alpha + \beta \frac{X}{X+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{X} = \alpha \frac{X+1}{X} + \beta$$

En évaluant respectivement en 0 et en -1, on trouve

$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = -1$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

En conclusion $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{a_n} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = 1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}$, or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Finalement, $u_n = \dfrac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}}$

c) D'après le b), $u_n = \dfrac{3}{a_{n+1}}$ donc la somme télescopique est celle du 1)a) avec des bornes différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{a_{k+1}} = 3 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge et } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}}$

D'après 1)c), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$, et d'après 1)a), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$. Or $\dfrac{3}{2} \leqslant 2$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

2) **a)**
```
def facto(n):
    res = 1
    for i in range(n):
        res *= i+1
    return res


def facto_rec(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    return facto_rec(n-1)*n
```
(Moralement il faudrait un « `assert n >=0` » ou autre test dans cette dernière fonction pour éviter un problème de terminaison en cas de `facto_rec(-1)`).

b) Pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)} \times \dfrac{1}{(n-2)!}$, et $\dfrac{1}{(n-2)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc

$$\frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, d'après Riemann, la série de terme général $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc, par comparaison,

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{a_n} \text{ converge}}$$

c) La suite (a_n) est positive donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant a_n = n!$. Par conséquent

$$u_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}}$

Dans ce genre de question, il faut vraiment chercher un stylo à la main : écrire ce qu'on cherche, traduire u_n (avec des pointillés : $a_1 + \cdots + a_n$), essayer de simplifier (travailler avec l'inverse : éviter les fractions, surtout avec des sommes au dénominateur). ***Ensuite****, les idées viennent.*

d) Comme $u_n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$, où $\dfrac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série convergente.

Ainsi, par majoration, $\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}}$

De plus, $\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{(n-1)!} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{a_n}$.

Donc, a fortiori, et en passant à la limite,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a_k > 0$ pour tout k, on pose $\overrightarrow{u} = (\sqrt{a}_1, \ldots, \sqrt{a}_n)$ et $\overrightarrow{v} = (\dfrac{1}{\sqrt{a}_1}, \ldots, \dfrac{n}{\sqrt{a}_n})$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

En élevant au carré pour ne plus avoir de racines, il vient :

$$\boxed{(1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\Big(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\Big)}$$

4) **a)** *Même remarque qu'en 2)a) : on écrit d'abord le début « évident » du calcul : recopier le résultat précédent, puis le trafiquer pour avoir quelque chose de ressemblant.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), en divisant par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$, il vient,

$$\frac{(1+2+\cdots+n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \Big(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \tag{1}$$

Or $(1+2+\cdots+n)^2 = \Big(\dfrac{n(n+1)}{2}\Big)^2 > 0$, donc en divisant (1) il vient :

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

Comme $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ *(prendre le calcul par les deux bouts)*, l'inégalité précédente s'écrit, après multiplication par $2n+1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité obtenue en b), on trouve

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$

Or, en cassant la somme sur n,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) &= 4\left[\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big)-\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big)\right]\\
&= 4\left[\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big)-\sum_{n=2}^{N+1}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\Big)\right]\\
&= 4\left[\frac{1}{a_1}+\underbrace{\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big)-\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\Big)}-\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\right]\\
&= 4\left[\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\right)-\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\right]\\
&= 4\left[\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}\frac{n^2}{a_n}-\underbrace{\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}}_{\geqslant 0}\right] \leqslant 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}}$

c) Par hypothèse, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$ converge. Donc d'après b), la suite $V_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est majorée.

Or, comme $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant 0$, (V_N) est une suite croissante.

C'est une suite croissante majorée, donc convergente :

$$\boxed{\text{La série de terme général positif } \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \text{ converge.}}$$

Or $2u_n=\dfrac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, donc par majoration $\sum u_n$ converge. De plus, en sommant les inégalités,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}}$$

Exercice 3 (CNM TSI 2017)

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Les intégrales de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ se calculent par IPP, en dérivant jusqu'à ce que mort du polynôme P s'en suive.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)(-\frac{\sin(kx)}{k})\right]_0^\pi}_{=0}+\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\frac{\cos(kx)}{k})\right]_0^\pi-\frac{1}{k^2}\int_0^\pi\frac{1}{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}[-\sin(kx)/(k\pi)]_0^\pi\\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

2) *Les exercices classiques vu en cours doivent être connus.* Soit $x\in]0,\pi]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}e^{ikx} &= e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k\\
&= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \qquad\qquad (\text{car } x\neq 0,\text{ donc } e^{ix}\neq 1)\\
&= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}})}\\
&= e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc, par linéarité de la partie réelle,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\Re\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)=\Re\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}}$$

3) Cf. exercice.

4) **a)** Prenons un équivalent de g en 0^+ :

$$\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin(x/2)} \sim \frac{-x}{2\frac{x}{2}} = -1$$

Donc g est continue en 0. De plus, g est continue sur $[0,\pi]$ comme composée de fonctions continues. En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,\pi]}$$

b) Pour tout $x \in]0,\pi]$, g est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonction $\mathscr{C}^1$, et

$$g'(x) = \frac{(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(x/2)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(x/2)}{(2\sin(x/2))^2}$$

<u>Étude en 0</u> : Utilisons le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. *(Avec les DL, il ne vous arrivera jamais de mésaventure. À condition d'être soigneux : le dernier $o(x)$ de la première ligne est fondamental.)*
Cherchons la limite de g' en 0^+ :

$$\begin{aligned}
(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(\frac{x}{2})) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(\frac{x}{2}) &= (\frac{x}{\pi}-1)2(\frac{x}{2}+o(x)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)(1+o(x)) \\
&= -x + x^2/\pi - x^2/(2\pi) - x + o(x^2) \\
&= x^2/(2\pi) + o(x^2) \\
&\sim x^2/(2\pi)
\end{aligned}$$

Or $(2\sin(x/2))^2 \sim x^2$, donc $g(x) \sim \dfrac{x^2/(2\pi)}{x^2} = \dfrac{1}{2\pi}$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ existe et est finie, donc, comme g est continue sur $[0,\pi]$, **d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$**,

$$\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$$

5) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sum_{k=1}^n \cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d'après 2)} \\
&= = \int_0^\pi 2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De plus, $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, donc

$$2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2) = \sin((2n+1)x/2) + \sin(-x/2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \int_0^\pi (\sin((2n+1)x/2) - \sin(x/2))g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{x^2}{2\pi} - x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi g(x)\sin\Big(\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \frac{x^2}{2\pi} - x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x}$$

L'idée est toujours la même : souvent, on ne voit pas a priori *pourquoi on obtient ce résultat. Il faut se laisser porter par les questions du sujet – où a-t-on calculé $\sum \frac{1}{k^2}$? On cherche toujours un stylo à la main, et non les yeux dans le vague.*

b) D'après 4)b), g est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Donc d'après 3), avec $m = (2n+1)/2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi = g$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi 2}{6}}$$