

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 2 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

- 1) a) Calculer pour $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$, où $p \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme

$$S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$$

- b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficient complexes, de la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, on exprimera le résultat en fonction des coefficients a_k de P .

Indication : On pourra éventuellement distinguer les différents cas : $n = 3N$, $n = 3N + 1$ et $n = 3N + 2$.

- 2) a) Soit $k \in \mathbb{C}$. Développer et simplifier le polynôme

$$R_k(X) = (X - k)(jX - k)(j^2X - k)$$

- b) Soit le polynôme $Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Montrer que T est un polynôme en X^3 .

- c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $H(Y) = T(X)$. Déterminer les racines du polynôme $H(Y)$.

- d) Déterminer de deux façons différentes les racines du polynôme T .

Exercice 2

Rappel : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \quad (1)$$

- 1) Étude d'un exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n(n+1)$.

- a) Déterminer α et β tels que $\frac{1}{a_n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis en déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

- b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n .

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, puis en déduire l'inégalité (1). demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$.

a) Écrire une fonction Python récursive qui calcule $n!$

b) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.

c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.

d) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

On revient au cas général

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 + 2 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right)$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}$

c) Montrer enfin que la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge puis établir le résultat (1) demandé.

Exercice 3

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k^2}$$

2) Soit $x \in]0, \pi]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

3) Soit ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(x) \sin(mx) \, dx = 0$.

4) Soit $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, \pi], \quad g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2 \sin(x/2)} \quad \text{et} \quad g(0) = -1$$

a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi 2 \sin(nx/2) \cos((n+1)x/2) g(x) \, dx = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \, dx$$

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DE L'ÉPREUVE