

A2023 – MATH I PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Notations et résultats admis

— Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.

— La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n .

— Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A , $\text{Tr}(A)$ sa trace, $\text{Sp}(A)$ son spectre et A^\top sa transposée.

— On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels de taille $n \times n$.

— Sur $M_{n,1}(\mathbf{R})^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où X^\top est la transposée de X . On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

— On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.

— On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$

— Soit C une partie non vide d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E . On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C$.

— On admet que si C est une partie convexe d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E , alors pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$.

— Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un \mathbf{R} -espace vectoriel

E est dite convexe si

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

- Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

- 1 ▷ Montrer qu'une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^*$.

- 2 ▷ Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$?

- 3 ▷ Montrer que, si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

- 4 ▷ Soit I intervalle de \mathbf{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur p .

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5 ▷ Montrer l'inégalité $\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq \det^{1/n}(M)$.

Indication : On pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$,

$$2 \max\{x_1, \dots, x_n\} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n x_k^{1/n} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \prod_{j=1}^n x_j^{1/n} \right)^2.$$

6 ▷ Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M .

7 ▷ En déduire que

$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} - \det^{1/n}(M) \geq \frac{\|M - \det^{1/n}(M) I_n\|_2^2}{2n \|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8 ▷ Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : On pourra utiliser la question 3.

9 ▷ Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1 + e^t)$.

10 ▷ Montrer l'inégalité

$$\forall (A, B) \in S_n^{++}(\mathbf{R})^2, \quad \det^{1/n}(A + B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B).$$

11 ▷ Montrer que, si A et B appartiennent $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A + tB) \geq \det(A)^{1-t} \det(B)^t.$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $S_n^+(\mathbf{R})$.

12 ▷ Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et soit $g : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(I_n + tA)$.

13 ▷ Exprimer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t)$ à l'aide des valeurs propres de A . En déduire que g est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

14 ▷ Soit $f : t \mapsto \ln(\det(I_n + tA))$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \text{Tr}(A)t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in S_n(\mathbf{R})$. Soit l'application f_A définie sur \mathbf{R} par

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15 ▷ Montrer que f_A est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

16 ▷ Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

17 ▷ Montrer que $f_A(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \det(A) + \det(A)\text{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)$.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$.

18 ▷ Déterminer $f'_A(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

19 ▷ On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$, montrer que

$$\Phi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

Soit $\alpha \in \left] -\frac{1}{n}, +\infty \right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par

$$\forall t \in] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \det^{-\alpha}(A + tM).$$

20 ▷ Montrer que φ_α est dérivable sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = -\text{Tr} \left((A + tM)^{-1} M \right) \det^{-\alpha}(A + tM).$$

21 ▷ Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi''_\alpha(0) = \det^{-\alpha}(A) \left(\alpha \text{Tr}^2(A^{-1}M) + \text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) \right).$$

22 ▷ Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.

Indication : On pourra utiliser la question 3.

23 ▷ En déduire que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

24 ▷ Montrer que, si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in] -\eta, \eta[$,

$$\frac{1}{\alpha} \det^{-\alpha}(A + tM) \geq \frac{1}{\alpha} \det^{-\alpha}(A) - \text{Tr}(A^{-1}M) \det^{-\alpha}(A)t.$$

Fin du problème

A2023 – MATH II PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Chaîne de Markov en temps continu

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

— Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A . Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$) on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1, i]$.

— On identifie \mathbf{R}^N avec $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ on note $E_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf la k -ième qui vaut 1. On rappelle que (E_1, \dots, E_N) est une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

On note $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $U[i] = 1$.

— On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ telle que

$$(M_1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, K[i, j] \geq 0$$

$$(M_2) \quad \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \sum_{j=1}^N K[i, j] = 1$$

— On appelle probabilité un vecteur ligne $\mu \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ tel que

$$(P_1) \quad \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mu[i] \geq 0$$

$$(P_2) \quad \sum_{j=1}^N \mu[j] = 1$$

— On notera $I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice identité.

Préliminaires

1 \triangleright Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K .

2 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}$ et $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ converge.

On notera $H_t \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$$

4 ▷ Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Montrer que pour $(t, s) \in \mathbf{R}_+^2$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N . À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i , il se retrouve dans l'état j avec une probabilité p_{ij} qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1; N \rrbracket$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $k \in \mathbf{N}$ tels que $P(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $P(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{ij}$. En particulier, cela ne dépend pas de k . De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice $K \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, K[i, j] = p_{ij}$$

6 ▷ Justifier que K est un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ montrer que $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$.

On pourra procéder par récurrence.

8 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t . Pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $P(A_{t,j}) = H_t[1, j]$.

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N . On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . On pose $q_u : E \rightarrow \mathbf{R}$ défini par $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geq 0$.

9 ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u . Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u . On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\ker(u)$.

10 ▷ Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

Partie 3 - Convergence de $H_t[i, j]$

On considère un noyau de Markov K . On suppose que 1 est une valeur propre simple de K .

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ telle que :

(a) Pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, $\pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j]$; on dit que K est π -réversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel t positif H_t est aussi un noyau de Markov π -réversible c'est-à-dire que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11 ▷ Montrer que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire.

13 ▷ On considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$. Montrer que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$ et que u est un endomorphisme autoadjoint de E .

On admet que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E .

14 ▷ Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i]$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$, on note ψ_X la fonction définie de \mathbf{R} dans E par $\psi_X : t \mapsto H_t X$ et φ_X la fonction définie de \mathbf{R} dans \mathbf{R} par $\varphi_X : t \mapsto \|H_t X\|^2$

15 ▷ Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans \mathbf{R} ,

$$\psi'_X(t) = -(I_N - K)H_t X$$

16 ▷ En déduire que φ_X est dérivable et exprimer $\varphi'_X(t)$ à l'aide de q_u .

On note $p : E \rightarrow E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

17 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18 ▷ On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u .

Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$.

19 ▷ Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N (H_{t/2}[i, k] - \pi[k])(H_{t/2}[k, j] - \pi[j])$$

On pourra utiliser la question 5.

21 ▷ En déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j]$.

FIN DU PROBLÈME

1.6 Mathématiques 2 - filière PC

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve couvrait une bonne partie du programme d'Algèbre Linéaire, de Probabilités et d'Analyse. L'objectif du problème posé était, premièrement de construire une chaîne de Markov sur un espace fini à temps continu, et ensuite, sous condition de réversibilité, d'établir la convergence vers la mesure invariante et d'estimer la vitesse de cette convergence en relation avec le spectre de la matrice de transition.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.6.2 Conclusion

Dans les copies les plus faibles, les correcteurs ont noté des confusions entre les matrices, les vecteurs et les scalaires ou bien entre les probabilités, les événements et les variables aléatoires.

Apprendre le cours est toujours nécessaire pour réussir.

Pour chaque question, les correcteurs attendent des arguments justes et précis. Mais il est fortement conseillé de les rendre courts. En effet, les candidats qui se lancent dans une rédaction trop longue ne sont pas recompensés par les correcteurs pour la longueur et se trouvent pénalisés par manque de temps pour réussir d'autres questions.

1.7 Mathématiques 1 - filière PSI

1.7.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI s'intéresse à différentes inégalités de convexité portant sur des fonctions définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Les thèmes abordés sont l'analyse de première année (notamment la convexité), l'algèbre linéaire, l'algèbre bilinéaire. Le théorème spectral joue un rôle essentiel. Les fonctions vectorielles apparaissent en fin de problème.

La première partie reprend des résultats très classiques, proches du cours : l'équivalence entre positivité d'une matrice symétrique et positivité du spectre ; la convexité de l'ensemble des matrices symétriques (définies) positives ; l'existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique définie positive ; l'inégalité de convexité (Jensen).

La deuxième partie, assez élémentaire, démontre et améliore une inégalité classique portant sur la trace et le déterminant.

La troisième partie, nettement plus difficile, montre la log-concavité du déterminant sur $S_n^+(\mathbb{R})$.

La quatrième partie est courte et facile ; on y majore le logarithme du déterminant de $A + tI_n$ à l'aide de la trace de A .

Enfin, la cinquième partie fait établir les développements limités de $t \mapsto \det(A + tM)$ et de $t \mapsto (A + tM)^{-1}$, afin d'obtenir un comportement asymptotique de $(\det(1 + tM))^{-\alpha}$ pour $\alpha > -1/n$ fixé.

Rapport des écrits - CCMP

Les questions sont de difficultés variées. Certaines sont très proches du cours, d'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, d'autres enfin sont vraiment difficiles. Elles ont permis aux candidats de montrer leurs diverses qualités. L'échelonnement des notes est très satisfaisant.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.7.2 Conclusion

La maîtrise des techniques et des résultats du cours est indispensable pour réussir les concours. C'était particulièrement le cas pour ce sujet, qui demandait en particulier une bonne maîtrise de l'algèbre bilinéaire. Beaucoup de candidats ont su montrer leurs qualités sur des questions assez techniques.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies. Les correcteurs apprécient notamment que les résultats soient soulignés, que les copies ne soient pas un jeu de piste et que les ratures soient propres ! Enfin, certaines copies écrites avec une encre gommable sont un peu difficiles à lire ; ce type de stylo est donc à éviter.

1.8 Mathématiques 2 - filière PSI

1.8.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet avait trait à plusieurs modes d'approximation des lois de Poisson par des lois à support fini. Dans un premier temps (partie **I**), on étudiait la probabilité qu'une permutation d'un ensemble à n éléments soit un dérangement, par la méthode des séries entières génératrices, puis la loi du nombre X_n de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments. On démontrait, lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence en loi de X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1.

La deuxième partie du sujet étudiait une mesure effective de l'écart entre deux lois sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: la mesure en question est la **distance de variation totale**, dont on montrait à la question 10 qu'elle vérifiait les axiomes d'une distance sur l'ensemble des familles positives sommables de somme 1 (que l'on peut identifier à l'ensemble des lois de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$).

L'objectif essentiel, dans le reste du problème, était de quantifier la convergence observée en partie **I** au sens de cette mesure (questions 14 et 15), puis de faire de même pour l'approximation de la loi de Poisson de paramètre λ par la loi binomiale $\mathcal{B}(\cdot, \lambda/\cdot)$ (question 20) et l'approximation d'une loi de Poisson par une autre (question 22).

La stratégie, dans cette dernière partie, était de contrôler la distance de variation totale entre deux produits de convolution (opération sur les lois correspondant à l'addition de deux variables aléatoires entières indépendantes) en fonction des distances facteur à facteur. Les derniers résultats étaient obtenus par écriture de la loi binomiale $\mathcal{B}(\cdot, \lambda/\cdot)$ comme produit de convolution de n lois de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, et de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme produit de convolution de n lois de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

C Mathématiques 1 PC

Q1 - Pour la première implication, le caractère non nul d'un vecteur propre n'est pas toujours précisé. Pour la deuxième, la démarcation s'opère entre les candidats qui citent complètement le théorème spectral (en précisant le caractère orthogonal de la matrice de passage, ou le caractère orthonormé de la base propre) et les autres. Contrairement à ce que semblent croire certains candidats, la positivité de $\langle Ax, x \rangle$ pour x vecteur propre n'entraîne pas directement la positivité pour tout vecteur x .

Q2 - Beaucoup de candidats omettent la vérification de la stabilité de $S_n(\mathbb{R})$ par combinaison convexe. Le caractère convexe de $S_n^+(\mathbb{R})$ est assez souvent correctement établi, celui de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ reçoit majoritairement un traitement trop peu soigneux.

On attendait des exemples précis pour justifier que $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels, le plus simple, convenant pour les deux ensembles, étant celui de la matrice $-I_n$. Le cas de $S_n^+(\mathbb{R})$ a rarement reçu une solution satisfaisante.

Q3 - Les candidats proposent en général une matrice solution obtenue en diagonalisant A ; mais beaucoup omettent de vérifier sa symétrie et son caractère défini positif. Le caractère symétrique repose de manière cruciale sur le caractère orthogonal de la matrice de passage.

Noter une matrice $D^{1/2}$ sans explication ne constitue pas un argument.

Q4 - Cette question, assez souvent abordée, s'est révélée très discriminante. Peu de candidats ont su correctement mener à bien la récurrence sur n , faute de tenir compte de la condition $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Q5 - Il y avait plusieurs arguments à donner :

- concavité de \log sur \mathbb{R}^{+*} ;
- expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres ;
- inégalité de Jensen, qui concluait la preuve dans le cas défini positif ;
- vérification directe dans le cas non défini.

Les premiers points ont souvent été bien traités. Toutefois, une minorité de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité ; parmi eux, certains poursuivent des calculs qui n'aboutissent pas, et semblent croire que l'absence de conclusion va fourvoyer le correcteur. Le dernier point a rarement été évoqué.

Q6 - Beaucoup de copies donnent l'expression correcte de $\|M\|_2$. Les justifications sont cependant parfois incomplètes, voire absentes.

Q7 - L'inégalité découle de la question 6. La preuve n'est pas toujours complètement convaincante, notamment en ce qui concerne le lien entre $\max(x_1, \dots, x_n)$ et $\sum_{k=1}^n (x_k)^2$.

Q8 - Cette question, conséquence classique de la corréduction de deux formes quadratiques, est difficile dans le cadre du programme actuel de la filière. Elle joue un rôle important dans la suite du sujet et aurait clairement mérité une indication. En l'état, elle n'a été traitée que par une poignée de candidats,

Rapport des écrits - CCMP

parmi les meilleurs. À noter que les termes diagonaux de D ne sont pas les valeurs propres de B , la relation entre les deux matrices n'exprimant pas la similitude.

Q9 - À nouveau (question 5), une minorité non négligeable de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde et produisent des calculs non concluants. D'autres y pensent, mais produisent un calcul faux. La question est tout de même bien traitée dans beaucoup de copies.

Q10 - Cette question demandait un certain recul. Il fallait en effet utiliser les questions 8 et 9, ce qui n'était pas indiqué. Elle a été traitée par un certain nombre de bons candidats.

Q11 - La question demandait à nouveau du recul. Elle a été un peu plus réussie que la précédente. Le cas non défini demandait une vérification complémentaire simple, rarement vue.

Q12 - Beaucoup ont vu le « passage au logarithme ». Il fallait préciser que la fonction était bien définie (déterminant strictement positif) et conclure à la concavité, non à la convexité !

Q13 - La question a été assez souvent bien traitée par les candidats l'ayant abordée. Certaines copies aboutissent cependant à un résultat faux, faute de dextérité dans l'usage du polynôme caractéristique.

Q14 - La bonne définition de f sur \mathbb{R}^+ est le plus souvent absente. Les candidats ayant obtenu le résultat correct à la question précédente ont généralement réussi à conclure en employant l'inégalité classique $\ln(1 + u) \leq u$.

Q15 - Question souvent traitée quand elle est abordée, soit via le caractère polynomial du déterminant, soit à l'aide de la question 8.

Q16 - Cette question, assez délicate, a très rarement reçu une solution satisfaisante. Certains candidats connaissaient le caractère ouvert de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ont correctement appliqué ; il était toutefois nécessaire, si l'on procédait ainsi, de vérifier ladite ouverture, qui n'est pas un résultat du programme. La question 8 donnait ici une approche plus directe.

Q17 - Le cas de $A = I_n$ est traité par certains étudiants, en lien avec la question 13. Le cas général, immédiat par factorisation à partir du précédent, a moins de succès.

Q18 - Question rarement traitée correctement. Dans quelques copies, la réponse est avancée sans aucune justification.

Q19 - Très peu de réponses correctes, en dépit de l'indication. Employer le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ avec $u = A$ ne constitue pas une réponse correcte.

Q20 - La justification de la dérivabilité est rarement complète : la stricte positivité de la fonction sur l'intervalle considéré intervient et doit être mentionnée.

Q21 - Question non immédiate, car demandant quelques calculs. Venant très tard dans le problème, elle n'a quasiment jamais été traitée.

Q22 - Question rapide à traiter avec l'indication, mais venant très tard, qui n'a quasiment jamais été traitée.

Q23 - et **Q24** - n'ont pratiquement pas reçu de réponse valable.

↑RETOUR

D Mathématiques 2 PC

Q1 - La première partie de la question est correctement traitée dans la majorité des copies. Le jury ne s'attendait pas toutefois à voir, dans les moins bonnes copies, une telle méconnaissance du produit matriciel, qui est tout de même une des opérations de base en algèbre linéaire. La relation $(AB)[i, j] = A[i, j] * B[i, j]$ a été rencontrée très fréquemment, sans parler d'autres formules plus exotiques et parfois dénuées de sens. Sur ces moins bonnes copies, on lit souvent aussi des égalités absurdes, comme par exemple entre la matrice-colonne U et une somme de coefficients scalaires.

Pour la deuxième partie : l'hypothèse $(M1)$ est parfois oubliée, ou à peine mentionnée sans justification propre, ce qui a été sanctionné. Certains candidats vérifient correctement l'hypothèse $(M2)$ par le calcul direct de la somme des éléments de la matrice AB , sans utiliser la première partie de la question.

Q2 - La question est généralement bien traitée par récurrence en utilisant la question 1. Quelques candidats oublient la base de la récurrence pour $n = 0$.

Q3 - Cette question a été rarement réussie. En effet, dans la majorité des copies l'identité $K^n[i, j] = (K[i, j])^n$ (fausse !) sert de point de départ pour appliquer la règle de d'Alembert et ainsi proposer un raisonnement faux. Dans d'autres copies, l'inégalité du début $0 \leq K^n[i, j] \leq 1$ est correcte, mais ensuite un terme général de la série (qui n'est pas positif pour tout t réel) est juste majoré par un terme de la série exponentielle. L'oubli de la valeur absolue dans cette majoration ne permet pas non plus de réussir la question.

Q4 - À la différence de la question précédente, cette question a été plutôt bien traitée. Quelques candidats ont oublié de vérifier l'hypothèse $(M1)$. La majorité des candidats ont su permuter correctement les sommes finie et infinie pour vérifier l'hypothèse $(M2)$.

Q5 - Cette question a été rarement réussie et permettait de repérer les bonnes copies. Beaucoup de candidats ont su utiliser le produit de Cauchy et identifier le binôme de Newton mais ont écrit un raisonnement erroné à cause de l'incompréhension du terme $K^n[i, j]$. En effet, $K^n[i, j]$ est un coefficient de la matrice K^n et non $(K[i, j])^n$. Ici encore, la relation fautive $(H_t H_s)[i, j] = H_t[i, j] * H_s[i, j]$ a été fréquemment rencontrée par les correcteurs.

Q6 - La question a été plutôt bien traitée, même si dans certaines copies un raisonnement rigoureux était remplacé par des explications intuitives non recevables. En particulier, la notation $(A | B)$ n'est pas un événement, et par conséquent $((Z_1 = j | Z_0 = i))_{1 \leq j \leq N}$ n'est pas un système (complet) d'événements.

Q7 - Beaucoup de candidats ne maîtrisent visiblement pas la formule des probabilités totales : le signe de sommation sur tous les états à l'instant précédent était souvent absent. Cette question s'est assez souvent soldée par un échec.

Q8 - L'indépendance de $(Z_n = j)$ et $(Y_t = n)$ pour tous $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$ était sous-entendue mais pas explicitée dans l'énoncé. Les correcteurs ont récompensé tous les candidats qui ont appliqué correctement la formule des probabilités totales dans cette question.

Q9 - Cette question du cours a été partiellement bien traitée. Néanmoins, beaucoup de candidats présentent un énoncé incomplet, en oubliant la base orthonormale. D'autres affirment dans la deuxième partie la positivité du spectre mais en la justifiant par des arguments faux.

Q10 - C'est encore une question qui, avec les questions 3 et 5, permettait de distinguer les bonnes copies. Elle ne demandait pourtant que la maîtrise de notions de base du programme d'Algèbre linéaire : la décomposition en base orthonormée, la notion de noyau et de projection orthogonale. Les correcteurs

Rapport des écrits - CCMP

sont étonnés de l'insuffisance de la réponse à cette question dans la grande majorité des copies.

Q11 - La question a été bien réussie par la majorité des candidats.

Q12 - La question a été très majoritairement réussie. Toutefois, la démonstration du caractère défini du produit scalaire est souvent peu satisfaisante. Nous aimerions voir écrit clairement qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Certains candidats veulent aussi prouver "défini" avant "positif", ce qui ne peut conduire qu'à des preuves assez bancales.

Q13 - La majorité des candidats voient l'utilité de la question 1 pour prouver que $U \in \ker(u)$. On note toutefois une erreur de logique beaucoup trop fréquente : de la constatation que $KU = U$ (question 1), il est souvent déduit abusivement sans autre argument ("par identification" ???) que, si un vecteur X vérifie $KX = X$, alors nécessairement $X = U$, ou au moins que X est colinéaire à U . Peu nombreux sont ceux qui exploitent correctement le fait que 1 est valeur propre simple pour montrer l'inclusion dans l'autre sens. La dernière partie de la question est rarement réussie : en effet, les candidats ne pensent pas à utiliser la réversibilité de K qui était nécessaire pour aboutir.

Q14 - La première partie de la question a été assez rarement entamée et encore plus rarement réussie. Le recours à la réversibilité de K était de nouveau indispensable. En admettant le résultat de la première partie, un petit nombre de candidats a réussi la deuxième, en remarquant la positivité des valeurs propres.

Q15 - Très peu de candidats notent que la dérivabilité est une conséquence immédiate de la dérivabilité de la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (*cf.* question 3). Certains se lancent dans la preuve de la convergence normale par une majoration sur un segment, ce qui a été récompensé sous réserve d'une preuve correcte. Ensuite, extrêmement peu de candidats prouvent l'identité demandée : le fait que $K^n[i, j] \neq (K[i, j])^n$ est à nouveau un obstacle à surmonter, comme dans les questions 3 et 5.

Q16 - Il était possible de traiter cette question en admettant le résultat de la question 15. Quelques candidats en ont profité et ont obtenu le résultat correct.

Q17 - Très peu de preuves correctes pour cette question : il était nécessaire de maîtriser le programme d'algèbre linéaire et de suivre le fil conducteur du sujet.

Q18 - La question n'a presque jamais été correctement traitée. Certains candidats ont deviné l'utilité de la question 10 mais n'ont pas su aller plus loin.

Q19 - La preuve du fait que $p(E_i) = \pi[i]U$ marque un bon début dans quelques copies rares. Dans des copies exceptionnelles la question 18 a été appliquée correctement et le calcul de $\|E_i - p(E_i)\|^2$ réussi.

Q20 - Cette question a été bien réussie dans un certain nombre de copies par les candidats qui ont compris le fil conducteur du sujet .

Q21 - Il était exceptionnel de réussir la première partie de cette question. Or, beaucoup de candidats déduisent le résultat final $\pi[j]$, qu'il fallait encore proprement justifier, notamment en remarquant la positivité de λ .

↑RETOUR



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n , c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n , est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$. Dans la partie **B**, on étudie P au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie **D**, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite (p_n) .

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de **C** sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.

3 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz) e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

4 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D .

En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D .

Dans la suite, pour tout $z \in D$ on note

$$P(z) := \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

5 ▷ Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(e^{-t}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

6 ▷ Montrer que q est continue par morceaux sur \mathbf{R} , qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7 ▷ Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} du$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8 ▷ Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} du = \ln(n!) + (n-1) - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9 ▷ Montrer que $\int_{[x]}^x \frac{q(u)}{u} du$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10 ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11 ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$ est décroissante sur \mathbf{R}_+^* .

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du \quad \text{si } t = 0.$$

12 ▷ Montrer que u_k est continue sur \mathbf{R}_+ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu} - 1} du$

puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geq 1$, et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14 ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du = -\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1 - e^{-tu}) du.$$

16 ▷ Conclure que

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^N ka_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $\llbracket 0, n \rrbracket^N$ et non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

18 ▷ Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D, \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \forall z \in D, \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19 ▷ On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, 1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration $\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n z^n$.

20 ▷ Soit $z \in D$. En examinant la différence $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta. \quad (1)$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22 ▷ Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L , montrer que

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x).$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout réel θ ,

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

23 ▷ Soit $x \in [0, 1[$ et θ un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))}.$$

En déduire que si $x \geq \frac{1}{2}$ alors

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos\theta)$ et $(1-x)^2$.

24 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \quad 1 - \cos\theta \geq \alpha \theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\beta(t-3/2\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\gamma(t-3/2|\theta|)^{2/3}}.$$

25 ▷ En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

E. Conclusion

26 ▷ En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

FIN DU PROBLÈME



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Le théorème matriciel de Kreiss

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \mapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) ; \|X\| = 1\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{C})$ à \mathbf{C} . Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $X^T M Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M , $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M . Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i -ième ligne et à la j -ième colonne. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| \leq 1\}.$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1 ▷ Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \mapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\text{op}}$.

Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \|M\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|} ; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\} \right\},$$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \|M\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2 ▷ Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, montrer que

$$\max\{|V^T U| ; V \in \Sigma_n\} = \|U\|.$$

En déduire que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors

$$\max\{|X^T M Y| ; (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\} = \|M\|_{\text{op}}.$$

2 L'ensemble \mathcal{B}_n

Soit \mathcal{B}_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $(\|M^k\|_{\text{op}})_{k \in \mathbf{N}}$ soit bornée. Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup\{\|M^k\|_{\text{op}} ; k \in \mathbf{N}\}.$$

3 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Montrer que la suite $(\|M^k X\|)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Si $\lambda \in \sigma(M)$, si X est un vecteur propre de M associé à λ , exprimer pour $k \in \mathbf{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de λ , k et X . En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.

4 ▷ On suppose que $n \geq 2$. Indiquer, avec justification, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à \mathcal{B}_n .

3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On dit que l'élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie \mathcal{P} si, pour tout (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \quad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \quad (\mathcal{P})$$

5 ▷ Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifient \mathcal{P} . On commencera par le cas des matrices diagonales.

- 6** ▷ On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie \mathcal{P} . En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \quad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}.$$

- 7** ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.

On admettra le fait suivant : soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie ; si $(v_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans E .

Si $m \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $(zI_n - M) \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}}$.

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \mapsto (|z| - 1) \|R_z(M)\|_{\text{op}}.$$

- 8** ▷ Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \quad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}, \quad \varphi_M(z) \leq b(M).$$

Soit $(c_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

- 9** ▷ Justifier l'existence et la continuité de la fonction u .

Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t} dt = c_k.$$

- 10** ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j \in \mathbf{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

Si $k \in \mathbf{N}$, en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

4 Variation totale et norme uniforme

Soit \mathcal{C}^1 l'espace des fonctions de classe C^1 de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbf{C} . Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| ; t \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{et} \quad V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

11 ▷ En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément C de \mathbf{R}^{+*} tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1, \quad V(f) \leq C \|f\|_\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $] -\pi, \pi[$ en lesquels la fonction f' s'annule est fini. On note ℓ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell \geq 1$, on désigne par $t_1 < \dots < t_\ell$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0 = -\pi$ et $t_{\ell+1} = \pi$.

12 ▷ Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Pour $0 \leq j \leq \ell$, soit ψ_j la fonction de \mathbf{R} dans $\{0, 1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j), f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbf{R} \setminus [f(t_j), f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j.$$

13 ▷ Si $y \in \mathbf{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell + 1$; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y \in \mathbf{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y), \dots, \psi_\ell(y)$. En déduire l'inégalité

$$(2) \quad V(f) \leq 2 \max\{N(y) ; y \in \mathbf{R}\} \|f\|_\infty.$$

5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F = \frac{P}{Q}$ où $P \in \mathbf{C}[X]$ et $Q \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que P et Q n'aient pas de racine commune dans \mathbf{C} ; si tel est le cas, les racines de Q dans \mathbf{C} sont, par définition, les pôles de F . On note \mathcal{R}_n l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans \mathbb{U} de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F \in \mathcal{R}_n$, P et Q deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$ vérifiant $F = \frac{P}{Q}$ et

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad Q(z) \neq 0.$$

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + ih(t) \quad \text{où} \quad (g(t), h(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour $u \in [-\pi, \pi]$, on définit une fonction f_u de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbf{R} par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = g(t) \cos(u) + h(t) \sin(u) = \operatorname{Re}(e^{-iu} F(e^{it})) = \operatorname{Re}(e^{-iu} f(t)).$$

- 14** \triangleright Dans cette question, on fixe $u \in [-\pi, \pi]$ et on suppose que f_u n'est pas constante. On fixe également $y \in \mathbf{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu} F(e^{it})$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S \in \mathbf{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = y \iff S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble $f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

- 15** \triangleright En observant que la fonction $|\cos|$ est 2π -périodique, calculer, pour $\omega \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| \, du.$$

En déduire que, si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a \cos(u) + b \sin(u)| \, du = 4 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- 16** \triangleright Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, du \right) dt$$

en fonction de $V(f)$.

- 17** \triangleright On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, du \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_u'(t)| \, dt \right) du.$$

On admet aussi que, pour $u \in [-\pi, \pi]$ tel que f_u ne soit pas constante, l'ensemble des points de $] -\pi, \pi[$ en lesquels la fonction f_u' s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14 \triangleright).

En déduire l'inégalité

$$(3) \quad V(f) \leq 2\pi n \|f\|_\infty.$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M \in \mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M) = \sup \{ \varphi_M(z) ; z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \}.$$

et entraîne que $b'(M) \leq b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.

Dans les questions 18 \triangleright et 19 \triangleright , on fixe $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in \Sigma_n^2$. Pour $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$, on note

$$\mathbb{D}_\rho = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| \leq \rho \}.$$

18 \triangleright Montrer qu'il existe un élément F_r de \mathcal{R}_n dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}, \quad |F_r(z)| \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t} dt.$$

19 \triangleright En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17 \triangleright , montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n b'(M).$$

20 \triangleright Démontrer finalement l'inégalité

$$(4) \quad b(M) \leq en b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante en est asymptotiquement optimale.

FIN DU PROBLÈME

1 Mathématiques

1.1 Remarques générales

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'aiment pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé aux candidats d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé. Enfin, les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin ; beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus. Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses : des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Nous rappelons que les questions « faciles » ; doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques \Leftrightarrow et \Rightarrow , ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question), ce qui ne facilite en rien la tâche du correcteur. Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambiguës : par exemple, utiliser \sim pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.



1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons p_n le nombre de partitions de n , c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble des n -uplets (a_1, \dots, a_n) tels que $\sum_{k=1}^n ka_k = n$. Le nombre p_n admet plusieurs interprétations : c'est, par exemple, le nombre de classes de conjugaison du groupe symétrique \mathcal{S}_n , ou le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est naturel de s'intéresser au comportement asymptotique de $(p_n)_{n \geq 1}$. En 1918, Hardy et Ramanujan ont établi l'équivalent

$$(1) \quad p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}.$$

Le problème est consacré à la démonstration du résultat légèrement plus faible :

$$(2) \quad p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right).$$

Posons $p_0 = 1$ et notons D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de \mathbb{C} . La démonstration repose sur l'analyse de la fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$. Cette fonction est donnée par

$$(3) \quad \forall z \in D, \quad P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

On montre dans la partie **C** de l'énoncé que

$$(4) \quad \forall z \in D, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k}.$$

Par ailleurs, on peut calculer p_n par la formule de Cauchy :

$$(5) \quad \forall r \in]0, 1[, \quad p_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} P(re^{it}) e^{-int} dt.$$

Pour tirer parti de (5), il faut contrôler $P(z)$ pour $z \in D$ proche du cercle unité, ce qui est l'objet des parties **A**, **B**, **D**. Un choix judicieux de r ($r = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)$) amène alors (2) (partie **E**). Une analyse plus poussée de l'intégrale conduirait à (1).

Le contrôle de $P(z)$ nécessite plusieurs étapes.

- Dans la partie **A**, on établit les développements suivants :

$$(6) \quad \forall z \in D, \quad P(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right),$$

$$(7) \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(P(e^{-t})) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

Dans la première formule, L est la restriction à D de la fonction $z \mapsto -\ell(1 - z)$, où ℓ est le logarithme principal. Le problème définit L par son développement en série entière :

$$(8) \quad \forall z \in D, \quad L(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}.$$

- Dans la partie **B**, on établit, en utilisant la relation (7), la formule de Stirling et le début de la formule d'Euler-Maclaurin, la formule asymptotique suivante :

$$(9) \quad \ln(P(e^{-t})) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1).$$

On dispose ainsi d'un équivalent de $P(r)$ lorsque $r \in [0, 1[$ tend vers 1.

- Dans la partie **D**, on majore $P(z)$ en fonction de $P(|z|)$ pour $z \in D$, au moyen d'inégalités élémentaires, de manière à établir que

$$(10) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2 u}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{iu})}{P(e^{-t})} du \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(t^{3/2}),$$

ce qui entraîne facilement (2) modulo le choix susmentionné de r .

Il est à noter que le sujet de Maths I de la filière MP fait établir l'équivalent (1), en admettant le développement (6). La démonstration, inspirée d'un travail de Baez-Duarte (1997), fait intervenir les probabilités. Plus précisément, l'estimation asymptotique de l'intégrale est déduite d'un théorème limite central local.

1.4.2 Commentaires généraux

Ce sujet nécessitait une solide maîtrise du programme d'analyse, qu'il couvrait assez largement : inégalités élémentaires, séries, séries entières, séries de fonctions (utilisation de la convergence uniforme), intégration (intégrales généralisées, convergence dominée, permutation série intégrale, continuité d'intégrale à paramètre). Il permettait ainsi de vérifier la connaissance de plusieurs théorèmes importants du cours, ainsi que la capacité à mener assez rapidement des calculs non triviaux. Le caractère fermé de la plupart des questions a conduit à un barème valorisant fortement les justifications précises. Hormis l'analyse, seule la combinatoire était sollicitée (question 17).

Le problème était très long, de niveau soutenu, mais abordable. Les questions nécessitaient principalement une bonne connaissance du cours, assortie à une certaine rigueur dans son application et/ou la capacité de mener à bien des calculs simples. L'étalonnage des copies est très satisfaisant. Beaucoup de candidats ont pu démontrer des qualités mathématiques ; les meilleurs ont traité une part très significative de l'épreuve.

À l'inverse, un lot important de copies reflète une méconnaissance du cours (ou tout au moins un manque de recul) et mettent en évidence de grosses lacunes techniques. Rappelons que les théorèmes

mettant en jeu une permutation non triviale de symboles (continuité d'une intégrale à paramètre, passage à la limite dans une intégrale, permutation somme-intégrale) nécessitent des hypothèses précises, qu'il faut absolument expliciter et vérifier. Soulignons aussi que l'obtention d'une bonne technique de calcul est un des objectifs essentiels des deux années de préparation.

1.4.3 Analyse détaillée des questions

Q1 - Correctement traitée dans beaucoup de copies. Plusieurs méthodes étaient possibles (entre autres : lemme d'Abel, règle de d'Alembert). Cependant, pas mal de candidats utilisent, dans cette question et les suivantes, un logarithme complexe non identifié.

Q2 - Beaucoup de candidats n'ont pas compris ce qu'ils devaient démontrer. Souvent, la dérivation formelle est faite, mais les justifications manquent de soin. Les bonnes solutions reposent soit sur une utilisation soignée des séries entières (gestion de l'intervalle), soit sur l'application du théorème de régularité C^1 des séries de fonctions. Enfin, le résultat n'est pas toujours simplifié.

Q3 - Globalement bien traitée. Cependant, certains candidats utilisent le fameux « logarithme complexe », qui « trivialisent » ; cette question et la précédente !

Q4 - Les deux items reposent sur des arguments un peu différents, ce qui explique sans doute que, si chacun a été traité par un nombre significatif de candidats, rares sont les copies qui résolvent la question dans son intégralité. Pour le premier item, les erreurs proviennent d'une manipulation sans soin des inégalités. Dans le second, une inégalité fautive ou non pertinente est souvent substituée à un argument asymptotique.

Q5 - Trois sous-questions simples, qui ne sont que rarement traitées par les mêmes candidats. La première repose sur le fait que \exp ne s'annule pas sur \mathbb{C} ; le fait qu'elle soit strictement positive sur \mathbb{R} ne saurait suffire. Pour la seconde, un argument de continuité est nécessaire. Pour la troisième, il faut préciser que chaque $1 - e^{-nt}$ est strictement positif.

Q6 - Encore trois sous-questions simples. La première fait apparaître, dans certaines copies, une mauvaise compréhension de la notion de fonction continue par morceaux. La deuxième est en général bien traitée, la troisième l'est rarement (le cas des entiers est à distinguer). Un dessin convaincant pouvait tenir lieu de solution pour l'ensemble de la question.

Q7 - Question traitée de manière très inégale, rarement de façon précise et efficace. On attend la mention de la continuité sur $[1, +\infty[$ (sans inventer un faux problème en 1) et une estimation justifiée en $+\infty$. On remarque beaucoup de résultats asymptotiques fantaisistes (équivalents) ou non justifiés. Enfin, les indispensables valeurs absolues sont absentes de la plupart des copies.

Q8 - La seconde égalité a souvent été établie. C'est moins vrai de la première, qui a reçu un certain nombre de solutions prétendant éviter le découpage de l'intégrale et relevant du pur bluff.

Q9 - La première partie était immédiate par encadrement ; beaucoup de candidats se sont embarqués dans des calculs explicites, très rarement concluants. Le lien avec la formule de Stirling a eu plus de succès ; la manipulation des équivalents manque toutefois parfois de rigueur.

Q10 - L'expression pertinente de $\ln(1 - e^{-t})$ comme somme de série est donnée dans beaucoup de copies. Il en est de même du calcul formel. Ceux qui ont produit une justification complète ont été

Rapport des écrits - CCMP

récompensés par le barème. L'argument le plus simple reposait sur le théorème de sommation L^1 ; quelques candidats ont préféré appliquer le théorème de convergence dominée.

Q11 - Question difficile, qui n'a que rarement reçu de réponses complètes. Les solutions partielles (preuve de la décroissance, lien avec le théorème de convergence dominée) ont été récompensées.

Q12 - Application de la continuité d'une intégrale à paramètre, très inégalement traitée, avec nécessité de préciser les choses en 0. Beaucoup de candidats ne semblent pas vraiment comprendre l'importance et la nature de l'hypothèse de domination.

Q13 - Cette question demandait un certain recul. Les réponses partielles (lien avec le théorème spécial des séries alternées) ont été bien payées. Les candidats ayant repéré la petite erreur d'énoncé sur le signe ont reçu un bonus.

Q14 - Le lien avec la question précédente via la convergence uniforme n'a été perçu que par une poignée de candidats.

Q15 - Rarement traitée.

Q16 - Question reposant sur la synthèse de plusieurs résultats précédents, mais demandant un peu de travail supplémentaire. Les réponses sont le plus souvent partielles ; à nouveau, beaucoup de tentatives de bluff.

Q17 - Seule question du problème ne faisant pas intervenir l'analyse, souvent abordée. Les réponses ont été très inégales, allant du parfait au dépourvu de sens (nombreuses erreurs de typage). Les deux premiers items ont eu plus de succès que les deux derniers.

Q18 - La première partie, très simple, a donné principalement lieu à des réponses aberrantes (expression des $a_{n,N}$ faisant intervenir z). Quelques candidats ont vu le produit de Cauchy dans la seconde partie.

Q19 - Rarement bien traitée. Le rayon 1 est donné par la plupart de ceux qui abordent cette question, mais avec des justifications le plus souvent insuffisantes.

Les questions suivantes n'ont reçu que peu de réponses significatives.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose d'aborder un théorème de Kreiss de 1962 et plus précisément de donner une démonstration de l'inégalité de Spijker publiée en 1992 et améliorant le résultat de Kreiss. L'inégalité en question est une borne sur la norme de la résolvante d'une matrice complexe $M \in M_n(\mathbb{C})$ satisfaisant une condition de stabilité : on demande $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|M^k\| < +\infty$.

Le sujet comporte 20 questions dont l'ultime question présente l'inégalité sous forme de coefficients matriciels de la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La norme matricielle choisie dans l'énoncé, notée $\|\cdot\|_{op}$, est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ notée quant à elle $\|\cdot\|$. Il sera donc question pour le candidat de spéciale PC-PC* à la fois de s'adapter et de montrer ses acquis sur des questions d'analyse matricielle.

Aussi, dans ce rapport, nous mentionnerons des erreurs significatives que nous avons rencontrées tout au long de la correction.

1.5.2 Analyse détaillée des questions

Partie 1

Cette partie du sujet a été particulièrement mal traitée. On a pu constater des lacunes sur les notions d'espaces vectoriels normés. Le point le plus important est le manque de compréhension de la nature de la norme que le candidat manipule. Le jury a pu noter des confusions entre norme d'une matrice et norme d'un vecteur.

Q1 - Il a été rare d'avoir vu cité le théorème des bornes atteintes, et encore plus rare une utilisation correcte du théorème pour $X \in \Sigma_n \mapsto \|MX\|$ continue, sur un fermé borné. Souvent les candidats ne mentionnent que le caractère fermé ou borné. Certains candidats ont pu reconnaître un compact. Les arguments pour prouver la continuité sont souvent approximatifs. On a pu lire des arguments comme : « Toute suite d'applications atteint ses bornes » ou bien « $X \mapsto \|MX\|$ est une norme ». La notion d'homogénéité pour une norme n'est pas vraiment comprise et est plutôt absente. Dans le meilleur des cas certains candidats redémontrent l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui est bien évidemment hors-sujet. Dans le pire des cas, les candidats évoquent l'inégalité de « Cauchy-Schwarz » au même titre que l'inégalité triangulaire ou encore « Minkowski » pour prouver une inégalité sur la norme matricielle d'un produit de matrices. De nombreux candidats écrivent « par théorème X » pour citer le théorème X . La formulation est pour le moins étrange.

Q2 - Dans la première partie de la question, beaucoup de candidats reconnaissent faussement un produit scalaire, et appliquent automatiquement l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le jury indulgent a peu sanctionné cette erreur. Très peu de candidats trouvent le vecteur maximisant la norme de la forme linéaire. Dans la deuxième partie de la question les candidats voient que l'égalité découle des questions précédentes, mais très peu la rédigent correctement. Certains candidats ont rempli plusieurs pages d'affirmations successives sans recueillir le moindre point. Le jury attendait à chaque fois une majoration de la quantité dont on cherchait un maximum, avant d'exhiber ensuite un cas d'égalité.

Partie 2

Q3 - De nombreux candidats prouvent encore une fois qu'ils n'ont pas compris la propriété de la norme $\|\cdot\|_{op}$. En effet, on voit souvent : pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

$$\|MX\| \leq \|M\|_{op}.$$

Le manque de distinction entre la nature des différents objets est surprenante voire alarmante : M une matrice, X un vecteur et λ une valeur propre. Par exemple on a pu lire $M^k X = \lambda^k X^k$! Le fait que le spectre des matrices considérées était dans le disque unité devait se justifier avec soin. Notons tout de même que les candidats ayant abordé les questions **Q1** et **Q2** correctement, réussissent en général cette question.

Q4 - De façon surprenante, de nombreux de candidats abordent cette question, et arrivent à produire des contre-exemples. Cependant, les justifications sont parfois absentes, ce qui n'a pas manqué d'être sanctionné par le jury.

Rapport des écrits - CCMP

Partie 3

La partie 3 a été mieux réussie.

Q5 - Q6 - La plupart des copies montraient une preuve précise de la propriété \mathcal{P} pour les matrices diagonales en posant le bon polynôme, avant de l'étendre ensuite à toute matrice diagonalisable.

Q7 - Le fait admis par l'énoncé permettait de considérer une série de matrices sans que l'on sorte du programme de PC. Les candidats qui l'ont compris ont facilement majoré la norme (d'opérateur) du terme général avant d'en déduire la convergence de la série. Certains ont majoré les sommes partielles de la série des normes avant d'argumenter que, pour les séries à termes positifs (puisque l'on travaille avec les normes des v_j), cela prouvait la convergence. Par contre, toute majoration des sommes partielles de la série de matrices, voire même des sommes totales, ne démontrait en rien la convergence de celle-ci. On a trop rarement vu la convergence de la série majorante justifiée par la reconnaissance d'une série géométrique ! Certains utilisent le critère de Riemann avec $j + 1 > 2$, ce qui est un non sens total. La deuxième partie de la question traduit une fois de plus l'incompréhension de la nature des objets manipulés. On pu lire les matrices traitées comme des scalaires : $\frac{1}{1-d-M}$ ou bien $M \leq \|M\|_{op}$. On a vu écrit $|M/z^{j+1}| = \|M\|_{op}/|z|^{j+1}$ on encore $|M/z^{j+1}| = |M|/z^{j+1}$. Enfin, si l'expression simplifiée a très souvent été trouvée, n'oublions pas qu'un argument de continuité était nécessaire avant de conclure.

Q8 - Question assez bien réussie par les candidats. Il s'agissait d'appliquer l'inégalité triangulaire sur la norme d'opérateur et de sommer une série géométrique.

Q9 - Dans la première partie de la question, les candidats voient la convergence absolue mais ont du mal à la relier proprement à la convergence normale. On a pu lire $e^{it} < 1$! On voit encore beaucoup d'écritures du type $\|f(t)\|_{\infty}$, laissant place au doute pour le correcteur quant à la compréhension de la notion de convergence normale. Certains utilisent le théorème d'interversion avec l'hypothèse $\sum_n \int_I |f_n|$ en le préférant à celui utilisant la convergence uniforme. Ceci est tout à fait correct s'il y a la continuité demandée. La conclusion par le calcul était ensuite plutôt bien réussie. Il était difficile de s'en sortir avec le maximum de points si on ne mentionnait pas de convergence normale (ou uniforme).

Partie 4

Q10 - À l'image des questions d'existence, le nombre maximal de points s'obtenait avec des justifications précises qui répondent au problème posé. Les bonnes copies contiennent le contre exemple $t \mapsto e^{int}$ avec succès. Des candidats maladroits choisissent $t \mapsto \cos(nt), \sin(nt)$ et s'enlisent dans les justifications.

Q11 - L'argument principal tenait dans le fait que f' ne changeait pas de signe sur chaque intervalle. Si beaucoup de copies contiennent les bonnes argumentations, d'autres tentent cependant des justifications erronées par télescopage ou par des primitives avec une valeur absolue.

Q12 - Cette question a été assez bien réussie quand elle a été abordée. Les candidats évoquent la monotonie à bon escient. On a pu même voir des preuves par l'absurde utilisant le théorème de Rolle, ce qui était tout à fait correct.

Partie 5

La partie 5 a été moins abordée et beaucoup moins réussie.

Q13 - Cette question devrait être bien traitée par des élèves de spéciale PC-PC*. Elle a été commencée par beaucoup de candidats pour le calcul de l'intégrale de $|\cos(u - w)|$. Cependant, ce calcul a amené

à des circonvolutions parfois surprenantes menant en majorité au résultat 0 alors qu'il s'agit d'une fonction continue positive non identiquement nulle. Là encore, la manipulation et la compréhension de la norme (ici, la valeur absolue sur \mathbb{R}) ont été à l'origine de beaucoup d'erreurs.

Q14 - Très peu abordée. Mais l'intégration par parties a été faite correctement à plusieurs reprises pour amorcer la question lorsqu'elle a été abordée.

1.5.3 Conclusion

D'un point de vue général, ce sujet a permis de départager les candidats, abordant plusieurs points ou techniques du programme tout en suivant un fil conducteur intéressant. Le jury a cependant noté un nombre plus important de copies quasi-vides ou comprenant parfois plusieurs pages de calculs que les années précédentes, mais ne contenant aucun résultat mathématiquement exact. Soulignons aussi que le jury apprécie une orthographe soignée en particulier concernant l'écriture des noms propres des mathématiciens. La bonne compréhension des objets, et en particulier des normes, est essentielle pour permettre de raisonner et de démontrer convenablement. Une inégalité ne peut porter sur des nombres complexes et encore moins sur des matrices. La plupart des justifications en analyse nécessite des majorations. Il est essentiel de comprendre l'importance de la norme pour se placer dans le seul ensemble ordonné à notre disposition dans le programme : \mathbb{R} .



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{Z} . On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de \mathbf{N} et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** (\mathcal{D}_α) - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1)$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X , autrement dit lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \quad (2)$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E , ainsi qu'une application $u : E \rightarrow F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition (\mathcal{D}_α) . On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée n -ième moyenne empirique des variables X_k . L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n .

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

- 1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
- 2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

- 3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant (\mathcal{D}_α) . Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.
- 4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.
- 5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y) , démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} du.$$

- 6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe \mathcal{C}^∞ . Donner une expression simple de sa dérivée n -ième pour tout $n \geq 1$.
- 7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.
- 8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1} (1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t, u) & \longmapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a.$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi, \pi[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

est de classe \mathcal{C}^1 et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X . On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X .

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition (\mathcal{D}_α) . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi \alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi \alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n) \right)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp\left(-\frac{\pi\alpha |t|}{2}\right).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur \mathbf{R} ?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a, b]$ de \mathbf{R} ,

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

FIN DU PROBLÈME



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Polynômes à racines toutes réelles

Notations

— Pour tout $0 \leq k \leq n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$Q(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$$

$$f \mapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f),$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k -ème.

Log-concavité des suites

Soit (a_0, \dots, a_n) une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leq j \leq n$ tel que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_n$;

— *log-concave* si pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a $a_j^2 \geq a_{j-1}a_{j+1}$;

— *ultra log-concave* si $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

1 ▷ Montrer que la suite binomiale $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

2 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

4 ▷ Montrer que P' est à racines toutes réelles.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5 ▷ Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6 ▷ Pour $1 \leq k \leq n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1}Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave.

On considère comme précédemment un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n à racines toutes réelles.

7 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

8 ▷ Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Dans la question 27 ▷, nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

Théorème 1 Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de Q ont toutes le même signe. Alors le polynôme

$$P \circ Q(X) := \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k (k!) X^k$$

est à racines toutes réelles.

Quelques exemples

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n .

- 9** ▷ Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.
- 10** ▷ On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$.
- 11** ▷ Soit B une matrice symétrique et on suppose comme dans la question précédente que les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

On considère

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx. \end{cases}$$

- 12** ▷ Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
- 13** ▷ Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- les L_i sont de degré i ;
- pour tout $0 \leq i, j \leq n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

- 14** ▷ Montrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme L_n est à racines toutes réelles.

Soit $(B_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli $\mathcal{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs b_i , i.e. $\mathbf{P}(B_i = 1) = b_i$ et $\mathbf{P}(B_i = 0) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

- 15** ▷ Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.
- 16** ▷ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geq 0$ pour tout $k = 0, \dots, n$. On suppose en outre que P est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernoulli indépendantes B_i telles que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n B_i = k)$.

Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n . On note $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $\beta_1, \overline{\beta}_1, \dots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de β_i . On note m_i la multiplicité de α_i et n_j celle de β_j et $\overline{\beta}_j$.

Pour tout $k \geq 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^s n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i^{k-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i^{k-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\beta}_i^{k-1}$.

17 ▷ Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \dots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.

Indication : on pourra utiliser les matrices de Vandermonde.

18 ▷ Montrer que

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^r m_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^s n_k (\psi_k(x_1, \dots, x_n)^2 + \overline{\psi}_k(x_1, \dots, x_n)^2),$$

s'écrit sous la forme $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j$.

19 ▷ Montrer que si P est à racines toutes réelles, alors $q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n s_{i+j-2} x_i x_j$, est à valeurs positives.

On suppose à présent $r < n$ et on écrit pour tout $i = 1, \dots, s$

$$\psi_i^2 + \overline{\psi}_i^2 = 2 \operatorname{Re}(\psi_i)^2 - 2 \operatorname{Im}(\psi_i)^2.$$

20 ▷ Montrer que les applications linéaires $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ suivantes sont \mathbf{R} -linéairement indépendantes :

$$\varphi_1, \dots, \varphi_r, \operatorname{Re}(\psi_1), \operatorname{Im}(\psi_1), \dots, \operatorname{Re}(\psi_s), \operatorname{Im}(\psi_s).$$

21 ▷ Conclure que P est à racines toutes réelles si et seulement si q est à valeurs positives sur \mathbf{R}^n .

Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.

Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^n a_k \gamma_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si P a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

22 ▷ Montrer que la suite définie par $\gamma_n = n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23 ▷ Montrer que si $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k \geq 0$, la suite $(\gamma_n)_{n \geq k} = (\gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots)$ l'est aussi.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que P a toutes ses racines réelles : on les note $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^n x_k$ et on admet que $\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} = a_n^2 \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

24 ▷ Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1} = 0$ puis que $\gamma_m = 0$ pour tout $m \geq k$.

Indication : on pourra utiliser les expressions de $\Gamma((1+X)^{k+1})$ et $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$, puis, pour $m \geq k+2$, raisonner sur les racines de $\Gamma((1+X)^m)$.

25 ▷ On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.

Indication : on pourra utiliser encore l'expression de $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$.

Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

26 ▷ Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

Réciproquement supposons que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x = z/n$, de sorte que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.

27 ▷ En utilisant le théorème 1, montrer que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On suppose que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28 ▷ Montrer que $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1} \gamma_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

29 ▷ En déduire que la série entière $\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

30 ▷ En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de \mathbf{R} , de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

31 ▷ Réciproquement montrer que si $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de \mathbf{R} , de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

Indication : pour cette question, toute tentative de réponse, partielle ou purement qualitative, sera considérée par le Jury.

FIN DU PROBLÈME

1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Si X est d'espérance finie μ et de variance σ^2 avec $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$, le théorème limite central assure que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée

réduite. En d'autres termes, si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(T_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème. La plus courante consiste à appliquer le théorème de continuité de Paul Lévy. Notant Φ_Y la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y , on vérifie en effet que la suite de fonctions $(\Phi_{T_n})_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

Il est naturel de se demander comment se comporte asymptotiquement la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ si X n'est plus dans \mathcal{L}^2 . Dans les années 1920, Paul Lévy a complètement résolu ce problème en mettant en évidence les *lois stables* qui portent son nom.

Le sujet est consacré à la démonstration d'un cas particulier de cette question. Soient désormais α un élément de \mathbb{R}^{+*} , X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} , symétrique, et vérifiant la condition

$$(1) \quad P(|X| \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \frac{S_n}{n}$. On démontre que la suite de fonctions $(\Phi_{M_n})_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers $x \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$. À ce stade, une application du théorème de Lévy (signalée à la fin du sujet, mais hors énoncé) permet de conclure que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de Cauchy de paramètre α , c'est-à-dire vers une variable aléatoire de densité $t \mapsto \frac{2\alpha}{4t^2 + \pi^2\alpha^2}$.⁴

La démonstration de la convergence simple revient à établir le développement limité

$$(2) \quad \Phi_X(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{\pi\alpha}{2}|t| + o(t).$$

Tel est l'objet des questions 6 à 18, les questions 1 à 5 étant consacrées à des questions probabilistes proches du cours et les questions 19 à 22 à la conclusion.

4. Les densité gaussiennes et de Cauchy sont les deux premiers exemples de lois stables.

Les questions 6 à 13 aboutissent au calcul classique de

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n}$$

pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (i.e. à l'étude de la série de Taylor du « logarithme principal » ; au point 1 sur le cercle de convergence).

Les questions 14 et 15 traitent de généralités sur les fonctions caractéristiques. La question 16 contient le cœur de l'argument :

afin d'établir (2), on exprime $\Phi_X(t)$ en fonctions des restes $R_n := P(|X| \geq n)$ via une sommation d'Abel (question 16), afin de tirer parti de (1). Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n (\cos(nt) - \cos((n-1)t)).$$

Le calcul (3) et l'hypothèse (1) amènent alors (2) sans grande difficulté.

1.4.2 Commentaires généraux

Ce sujet nécessitait une solide maîtrise des probabilités, testée dans les questions 1 à 5, 14-15 et 19-20, et de l'analyse (intégration, y compris convergence dominée et intégrales à paramètre, séries, séries de fonctions, un peu de topologie), évaluée dans les questions restantes. Il permettait de vérifier la connaissance de plusieurs théorèmes importants du cours, ainsi que la capacité à mener assez rapidement des calculs non triviaux. Le caractère fermé de la plupart des questions a conduit à un barème exigeant en fait de justifications précises.

De bon niveau, le texte restait cependant abordable. Il comprenait un nombre important de questions de difficulté moyenne, nécessitant simplement une connaissance correcte du cours, assortie à une certaine rigueur dans son application et/ou la capacité de mener à bien des calculs simples. Il a permis un étalonnage très satisfaisant des copies. Les meilleurs candidats ont su traiter l'essentiel du sujet, beaucoup ont montré des qualités importantes.

À l'inverse, un lot important de copies témoignent d'un manque de recul sur le cours et de faibles capacités calculatoires. Le premier point les conduit à produire un discours émaillé de graves confusions et très souvent dépourvu de sens ; en particulier, les notions d'espérance et d'égalité en loi sont souvent mal comprises. Pire, dans un nombre non négligeable de copies, les questions 1 à 5 donnent naissance à des écritures absurdes $P(X)$, $P(X())$. Le second point se traduit de façon particulièrement nette dans la manipulation des inégalités ; ainsi, dans les questions 6 à 11, beaucoup de copies écrivent des inégalités portant sur les nombres complexes.

1.4.3 Analyse détaillée des questions

Q1 - Beaucoup de candidats oublient que, pour définir l'espérance, une condition de convergence absolue est nécessaire.

Q2 - Beaucoup d'erreurs dans cette question très proche du cours. En particulier, confusion fréquente entre « X est bornée » et « X ne prend qu'un nombre fini de valeurs », parfois parce que X est implicitement supposée à valeurs entières.

Q3 - Le premier point était immédiat en appliquant un théorème du cours ; il a parfois donné lieu à des développements étranges. Pour le second point, assez peu de candidats invoquent l'argument simple selon lequel une variable aléatoire dont le carré est d'espérance finie est elle-même d'espérance finie.

Q4 - Beaucoup de candidats confondent égalité en loi et égalité, ce qui les conduit à écrire des relations du genre $f(X) = f(-X) = -f(X)$.

Q5 - Beaucoup de discours sans contenu, qui n'utilisent pas l'indépendance pour montrer que $(-X, -Y)$ et (X, Y) ont même loi.

Q6 - Le résultat était une simple application de la régularité d'une intégrale fonction de sa borne supérieure, qu'il fallait étayer en justifiant la bonne définition de l'intégrale, i.e. en justifiant que $1 - uz \neq 0$ pour $u \in [0, 1]$. Le problème de définition est largement ignoré, ou étrangement abordé via la « règle de Riemann » en une borne, alors que la fonction intégrée est continue sur le segment $[0, t]$. Certains candidats compliquent les choses en se ramenant à une intégrale à paramètre et donnent un résultat (pas toujours juste) sous forme intégrale. D'autres utilisent, de manière purement formelle, un logarithme complexe hors programme.

Q7 - Question très élémentaire, reposant sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité. La seconde partie n'est quasiment jamais traitée. Beaucoup de candidats écrivent des inégalités entre nombres complexes.

Q8 - Bon nombre de candidats voient qu'il s'agit de permuter une limite et une intégrale. En revanche, les justifications (majoration directe, convergence uniforme ou dominée) ne sont complètes que dans peu de copies.

Q9 - La locution « formule de Taylor » a posé problème. Certaines copies évoquent la formule de Taylor-Young (inutilisable ici). D'autres affirment sans preuve que L est somme de sa série de Taylor en 1.

Q10 - Très peu de justifications pour la première partie, et des confusions entre continuité et continuité séparée. Dans la seconde partie, l'utilisation du théorème des bornes atteintes est rarement vue.

Q11 - Cette application du théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre a été largement abordée. Une partie significative des candidats connaît les hypothèses du théorème et vérifie correctement les hypothèses de domination. D'autres commettent des erreurs surprenantes (par exemple en dérivant sous l'intégrale par rapport à la variable d'intégration).

Q12 - Il s'agissait d'un petit calcul fondé sur la question précédente. Certains candidats effectuent un changement de variable à valeurs complexes dans l'intégrale. Ceux qui calculent correctement F' ne donnent pas toujours un argument complet pour F ; dans certaines copies, on lit même $F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F'(t) dt$, ce qui rassemble beaucoup de fautes en un espace très court.

Q13 - Question de synthèse, qui a permis de récompenser les candidats ayant fait l'effort de comprendre où l'énoncé voulait en venir.

Q14 - La bonne définition, qui découle de la question 2, est souvent omise. Le reste de cette question facile est traité convenablement, au fait près que la valeur absolue de $|\Phi_X(t)|$ disparaît assez fréquemment.

Q15 - La continuité reposait sur un argument de convergence normale, qui n'est vu que par une minorité de candidats.

Q16 - La partie « formelle » des deux calculs est assez souvent comprises dans les copies qui abordent ces questions, même si le passage « de \mathbb{Z} à \mathbb{N} » est souvent savonné. En revanche, les justifications sont rarement complètes.

Q17 - Dans la première sous-question, l'argument de convergence normale n'est pas souvent vu. Les sous-questions suivantes sont rarement abordées.

Q18 - La première partie est rarement traitée. Pratiquement aucun des candidats qui abordent la seconde partie ne voit que la réponse est non, et que l'on a en fait, par parité de Φ_X , la relation (2) (qui s'impose aux candidats ayant bien traité par la suite la question 21).

Q19 à 22 - Ces questions ont été partiellement abordées par les meilleurs candidats et ont également fait l'objet de grappillages. Dans le second cas de figure, les justifications ont souvent été très insuffisantes.

1.4.4 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie, afin de maîtriser en profondeur les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Il est plus fructueux de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions « faciles » doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème.

Nous soulignons également l'importance d'une lecture précise de l'énoncé : beaucoup de candidats traitent les questions en ajoutant des hypothèses superflues : ainsi, dans les questions 1 et 2, les variables aléatoires considérées ne sont pas à valeurs dans \mathbb{Z} .

Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées ; on recommande aux candidats d'employer une encre foncée, qui reste bien visible sur les copies scannées. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) est très appréciée. Enfin, il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'ont pas à se voir confrontés à un jeu de piste !

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet tourne autour d'un théorème de Polya sur les polynômes réels à racines toutes réelles. On dispose pour les polynômes⁵ de deux écritures, l'une additive sous la forme $\sum_k a_k X^k$ et l'autre multiplicative $\prod_k (X - a_k)$ et alors que les relations coefficients-racines permettent de passer de l'écriture multiplicative à l'additive, on sait depuis Galois que le passage dans l'autre sens n'est en général pas possible.

Partant de l'observation aisée découlant d'une application directe du théorème de Rolle, que le polynôme dérivé d'un polynôme à racines toutes réelles est encore à racines toutes réelles, et de la linéarité de la dérivation la rendant transparente dans l'écriture additive des polynômes (il suffit, à décalage près, de multiplier la suite des coefficients par les éléments de la suite $(1, 2, 3, \dots)$), suivant Polya, on s'intéresse alors aux suites réelles, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante : à chaque fois qu'on dispose d'un polynôme réel à racines toutes réelles, écrit sous sa forme additive $\sum_k a_k X^k$, alors le polynôme $\sum_k \gamma_k a_k X^k$ est aussi à racines toutes réelles.

Afin de ne pas rallonger encore un sujet déjà très long, le théorème de Schur est admis et le lecteur curieux pourra en trouver une preuve, reposant notamment sur le résultat de la **Q8**, dans le livre de B. Levin *Distribution of Zeros of Entire Functions*, au chapitre VIII section 2.

Avant d'attaquer le coeur de la démonstration, on parcourt une partie du programme de PC où l'on peut trouver des polynômes réels à racines toutes réelles :

- en algèbre linéaire avec les polynômes caractéristiques des matrices symétriques,
- les polynômes orthogonaux,

5. Pensez à l'analogie entre \mathbb{Z} et $\mathbb{R}[X]$ avec l'écriture en base 10 et la factorisation en facteurs premiers.

- les séries génératrices de certaines variables aléatoires,
- les formes quadratiques.

On définit enfin les suites multiplicatives au sens de Polya-Schur et on commence par en étudier les premières propriétés notamment en utilisant le théorème de Rolle : annulation et changements de signe.

La dernière partie, nettement plus difficile, s'intéresse alors au théorème de Polya-Schur, i.e. à donner une caractérisation des suites multiplicatives au sens de Polya-Schur.

1.5.2 Analyse détaillée des questions

Dans le détail des questions :

Q1 - Log-concavité de la suite binomiale : la question a été généralement bien traitée, il faut cependant éviter de donner à lire au correcteur des inégalités forcément justes puisque l'énoncé le propose, sans que la justification ne saute aux yeux !

Q2 - Question plutôt bien traitée par l'ensemble des candidats mais il faut veiller aux signes lorsqu'on multiplie une inégalité.

Q3 - L'unimodularité mentionne un j qu'il s'agit, à priori, de caractériser, visiblement il s'agit ici de l'indice où la suite est maximale. On trouve de nombreuses copies qui raisonnent sur tous les indices à la fois sans savoir où aller. Ainsi une solution naturelle consiste à partir de a_j pris maximal parmi les éléments de la suite, ou alors d'utiliser la monotonie de a_{j+1}/a_j et de regarder l'indice où on franchit 1.

Q4 - Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies, les autres se contentant de construire les racines données par le théorème de Rolle.

Q5 - Le jury a été désagréablement surpris par les réponses à cette question pourtant très simple. Par négligence le degré a souvent été donné comme étant égal à n , quand il n'était pas nul ! Il s'agissait dans un premier temps de remarquer que 0 ne pouvait pas être racine, puis de remarquer que $Q(z) = 0$ si et seulement si $P(1/z) = 0$ et que donc toutes les racines de Q devaient être réelles.

Q6 - Quelques copies ont réussi à mener les calculs jusqu'au bout, les autres se sont contentées de suggérer de prendre le discriminant d'un polynôme de degré 2 qu'ils ont renoncé à calculer, ce qui est bien dommage.

Q7 - La stratégie de la question 4 menait à donner toutes les racines sauf une, qu'on pouvait alors obtenir soit par le théorème de Rolle dit infini, ou simplement en disant que les racines complexes non réelles viennent en couple avec leur conjugué complexe.

Q8 - La question a été abordée via l'écriture additive de P ce qui ne pouvait pas donner le résultat.

Q9 - Le jury conseille aux candidats de ne pas perdre inutilement du temps à redémontrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, mais simplement d'invoquer le théorème du cours. Le jury signale par ailleurs que, conformément au théorème de Galois, des manipulations sur les lignes et colonnes ne peuvent pas, en général, permettre de calculer les valeurs propres.

Q10 - Il s'agissait essentiellement de bien rappeler que la matrice de passage pour obtenir une matrice diagonale, peut être prise orthogonale.

Q11 - La question était plus difficile. On pouvait utiliser que les polynômes caractéristiques de AB et BA étaient identiques (connaissance hors programme), éventuellement se limiter au cas où A est inversible, ou alors reprendre la preuve classique du fait qu'une matrice symétrique a toutes ses valeurs propres réelles.

Q12 - Il fallait veiller à utiliser la continuité pour prouver la séparation et invoquer le fait qu'un polynôme nul sur une partie infinie est nécessairement nul.

- Q13** - Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est connu mais il faut bien préciser la base de départ pour que la construction vérifie les conditions demandées. Par ailleurs une proportion notable des candidats ont mentionné les polynômes de Lagrange, certainement en désespoir de cause !
- Q14** - Seules quelques rares copies sont parvenues à résoudre cette question qui visiblement n'est plus si classique, sur les racines des polynômes orthogonaux.
- Q15** - La question a été très mal traitée, certains candidats ont pensé qu'on avait des variables de Bernoulli de même paramètre. Souvent le jury a observé des formules mentionnant un indice i non défini ce qui ne pouvait pas avoir de sens.
- Q16** - Cette question délicate a été très rarement abordée correctement.
- Q17** - La matrice de Vandermonde est souvent apparue mais il fallait soit écrire un système d'équations qui y était associé, soit préciser quelle base était utilisée pour écrire la famille considérée (la notion de base duale est hors programme à priori). Il s'agissait par ailleurs de bien remarquer que la matrice n'était pas nécessairement carrée.
- Q18** - Il s'agissait essentiellement de savoir développer correctement le carré d'une somme, puis de rassembler les différents termes.
- Q19** - Il fallait bien préciser que le carré d'un nombre *réel* est positif.
- Q20** - Question assez mal traitée, il fallait partir d'une relation linéaire entre les applications données pour se ramener, en suivant l'indication, à la **Q17**.
- Q21** - Quelques candidats ont su exploiter l'indication qui suggérait d'annuler tous les termes d'une somme sauf un à valeur négative.
- Q22** - Question souvent bien traitée sauf par des copies qui s'essayaient à raisonner sur les coefficients sans penser à utiliser la **Q4**.
- Q23** - Il fallait considérer $\Gamma(X^k P)$ puis factoriser par X^k , argument qui n'a été repéré que par de trop rares candidats.
- Q24** - Question pas très difficile mais nécessitant des calculs assez longs qui ont découragé les étudiants plutôt à la recherche de points vite gagnés à ce stade de la copie.
- Q25** - Question bien traitée par les rares copies qui s'y sont essayé.
- Q26** - Il s'agissait de reconnaître $\Gamma((X+1)^n)$ et de remarquer qu'une somme de termes positifs non tous nuls ne pouvait pas être nulle. Une proportion non négligeable des copies a su repérer ces points faciles à gagner.
- Q27** - Question plus difficile et pas abordée : il s'agissait d'appliquer le théorème de Schur à $P(X) = a_0 + \dots + a_m X^m$ et au polynôme P_n de la question précédente, puis de donner un argument justifiant que la limite d'une suite de polynômes de degré fixe dont toutes les racines sont réelles, ne possède que des racines réelles.
- Q28** - Il fallait simplement remarquer que $\sum_k \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ était à racines toutes réelles de sorte que d'après la question 6, $(\gamma_k \binom{n}{k})_k$ est ultra log-concave et donc $(\gamma_k)_k$ est concave. La question n'a pas été abordée (le sujet étant relativement long, ce n'est pas étonnant).
- Q29** - De rares étudiants ont su détecter une question vite résolue et ont pu gagner un point facilement.
- Q30** - Le calcul du rayon de convergence a été bien vu par quelques rares copies. La convergence de la suite $(P_n)_n$ vers $\sum_n \gamma_n x^n$ n'a pas été traitée.
- Q31** - Il s'agissait de montrer la réciproque dans le théorème de Polya via des arguments de convergence dont le jury ne s'attendait pas vraiment à lire une rédaction correcte vue la longueur du sujet.

1.5.3 Conclusion

Le jury note que les questions d'existence (en particulier, les **Q3**, **Q10** et **Q13**) posent des difficultés notamment parce que beaucoup de candidats ne commencent pas par construire l'objet dont on impose les contraintes et se contentent de phrases répétant plus ou moins l'énoncé. Dans ce genre de situation, un raisonnement de type Analyse-Synthèse se révèle souvent efficace.

Enfin le jury tient à signaler la proportion bien trop importante de copies où de manière répétée dans les questions dites fermées, où la réponse est indiquée, sont donnés à lire des arguments longs et vides de sens où la formule demandée finit par apparaître. Cette stratégie non seulement n'apporte aucun point mais dessert au final le candidat qui sera ensuite plus sévèrement jugé lors de chacune des questions suivantes. L'honnêteté intellectuelle, notamment d'un scientifique, est une qualité grandement appréciée, et pas seulement des correcteurs.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI porte sur la convergence en loi de la moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une condition de dispersion.

Le problème mêle les probabilités à divers chapitres d'analyse : analyse élémentaire de première année, séries numériques, convergence dominée, intégrales à paramètre continu, séries de fonctions... Peu de questions sont vraiment faciles, mais la plupart sont de difficulté raisonnable. Les premières parties étant relativement indépendantes, quasiment toutes les questions sont abordées par une bonne part des candidats.

Les correcteurs tiennent à souligner que, malgré la préparation rendue difficile par les conditions sanitaires, les candidats ont su assimiler les programmes des deux années de classe préparatoire, et aborder l'épreuve de façon satisfaisante.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies, et nous invitons les futurs candidats à y veiller.

1.6.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - La question déroute bon nombre de candidats. On attend ici la définition : X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Nous recommandons aux candidats de travailler en priorité le cours.

Q2 - Dans beaucoup de copies, la variable aléatoire est considérée comme à valeurs dans un ensemble fini, ce qui n'a pas de raison d'être.

Q3 - On peut utiliser ici deux résultats au programme. D'une part le fait qu'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq n)$ converge. D'autre part le fait qu'une variable aléatoire ayant un moment d'ordre deux possède un moment d'ordre un.

Q4 - On applique le principe du transfert en loi rappelé dans le préambule. Certains candidats ont prouvé directement la deuxième partie de la question en considérant les valeurs positives et négatives prises par la variable aléatoire.

Q5 - L'indépendance et la symétrie donnent que $(X, Y) \sim (-X, -Y)$. On utilise alors le transfert de l'égalité en loi



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet, on considère des \mathbf{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u , et l'on notera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \text{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$: on prendra garde au fait qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$!

Un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $M_n(\mathbf{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :

Théorème A.

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n > 0$, et \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème **A** est ici considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément, on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

Théorème B.

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n > 0$, et \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Il existe alors une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **C**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **D**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème **B** par récurrence sur la dimension de l'espace E .

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carrée M représentant l'endomorphisme u .

1. Démontrer que M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure, établir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, et en déduire que $\text{tr } u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

On fixe une base $\mathbf{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans \mathbf{B} est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ un élément nilpotent de nilindice n . On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et $u(e_1) = 0$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E , ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.
4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p . Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq n - 1$ et $p \geq 2$ alors $\text{Im } u^{p-1} = \text{Im } u \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im } u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- | -))$. Lorsque a désigne un vecteur de E , on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (a | x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ en fonction de celle de E . Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera désormais $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, (a \otimes x)(z) = (a | z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$.
7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\text{tr}(a \otimes x) = (a | x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien $(E, (- | -))$ de dimension $n > 0$. On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de $\mathcal{N}(E)$ est toujours inférieur ou égal à n . Soit \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de \mathcal{V} . On a donc $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble \mathcal{V}^\bullet de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\text{Im } u^{p-1}$ pour u dans \mathcal{V} ; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \text{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme C. Soit u et v dans \mathcal{V} . Alors $\text{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k .

Lemme D. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans \mathcal{V} .

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de \mathcal{V} .

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, (u + tv)^k = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.

9. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.
10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\text{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme C.

11. Soit $y \in E$. En considérant, pour un $a \in K(\mathcal{V})^\perp$ quelconque, la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto (a \mid (u + tv)^{p-1}(y))$, démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \text{Im } u^{p-1}$.
12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im } u^{p-1}$.
Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier n . Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent \mathcal{V}' de $\mathcal{L}(E')$, de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il existe une base de E' dans laquelle tout élément de \mathcal{V}' est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \text{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H . Pour $u \in \mathcal{W}$, on note \bar{u} l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \quad \bar{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\bar{\mathcal{V}} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, \mathcal{W} , $\bar{\mathcal{V}}$ et \mathcal{Z} sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E , \mathcal{V} , $\mathcal{L}(H)$ et \mathcal{V} .

14. Montrer que

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$

et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $(a \otimes x)$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **C** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.
19. Déduire des questions précédentes et du théorème **A** que

$$\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^\perp = \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

20. En appliquant, entre autres, l'hypothèse de récurrence et la question 19, montrer que le nilindice générique de \mathcal{V} est supérieur ou égal à $n - 1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble \mathcal{V}^\bullet a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de \mathcal{V} , et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im } u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n - 1$ d'après la question 20.

21. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On pourra utiliser les résultats des questions 4 et 19.
22. On suppose qu'il existe v_0 dans \mathcal{V} tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On pourra s'inspirer de la méthode de la question 11.
23. Conclure.

FIN DU PROBLÈME



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Approximation par des exponentielles-polynômes

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur \mathbf{R} .

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de \mathbf{R} , on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

2) À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1 . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E .

5) Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F .

On fixe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de F , et x un vecteur de E .

6) Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

7) Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

9) En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est convergente.

10) En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers \mathbf{R} .

11) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

Pour tout entier naturel n , on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12) Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2 .

13) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α , ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx.$$

14) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

15) Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

16) Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

17) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k , on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N .

18) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19) En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Dans la suite, on note \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23) Soit $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22) à la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto h(\sqrt{x})e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23) est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur \mathbf{R} .

FIN DU PROBLÈME

2.3.4 Conclusions

Cette épreuve était progressive, les six premières questions étaient abordables et permettaient aux candidats sérieux de gagner des points. Malheureusement, par manque de connaissances ou par volonté d'aller vite, un certain nombre de candidats n'a pas traité ces questions assez sérieusement. Nous conseillons donc aux candidats d'être attentifs à ce premier groupe de questions plutôt que d'aller tenter une ou deux questions faisables mais éparpillées dans le sujet ou de ne prendre son temps que pour les questions difficiles.

Ce sujet permettait de faire une distinction entre les excellents candidats et les élèves sérieux, mais aussi entre les candidats sérieux et ceux dont le travail pendant deux ans a pu manquer d'intensité. À l'opposé de copies très faibles, certaines excellentes, mais très rares, ont abordé tout le sujet de façon correcte.

2.4 Mathématiques 1 - filière PC

2.4.1 Présentation du sujet

Soient \mathbb{K} un corps, $n \in \mathbb{N}^*$. Le sous-espace $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures strictes est d'une part constitué de matrices nilpotentes, d'autre part de dimension $\binom{n}{2}$. Les deux résultats suivants ont été établis par Gerstenhaber en 1958 si \mathbb{K} est de cardinal supérieur ou égal à n , puis étendus par Serezhkin au cas général en 1982.

Théorème A. Tout sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes est de dimension au plus $\binom{n}{2}$.

Théorème B. Tout sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes et de dimension $\binom{n}{2}$, est conjugué à $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En revanche, dès que $n \geq 3$, il existe des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués de matrices nilpotentes qui ne sont conjugués à aucun sous-espace de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, il existe des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitués de matrices nilpotentes, maximaux au sens de l'inclusion pour cette propriété, mais de dimension strictement inférieure à $\binom{n}{2}$.

La démonstration du théorème A pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a fait l'objet d'un problème au CCMP (PSI, Maths II, 2016). Le but du présent texte est d'établir le théorème B, toujours pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En fait, la démonstration du théorème A est implicite dans le présent sujet. L'argumentation suit celle donnée dans les parties 2 et 3 de l'article *The structured Gerstenhaber problem (II)*, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 569, 2019, pp. 113-145.

La limitation à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ permet de contourner les arguments de dualité via la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^n ; avec des modifications évidentes, la preuve s'adapte au cas traité par Gerstenhaber¹.

2.4.2 Commentaires généraux

Le sujet, d'un grand intérêt mathématique, met en jeu une partie très significative des programmes d'algèbre de PCSI et PC : algèbre linéaire élémentaire, espaces euclidiens, réduction. Il est très long, d'un niveau conceptuel élevé, notamment par une rédaction privilégiant systématiquement le point de vue géométrique sur celui des matrices et la nécessité qu'il impose d'absorber un grand nombre de notations. Il comporte cependant un certain nombre de questions simples. Il a permis de tester la connaissance et la compréhension du cours des candidats, leur niveau d'abstraction, ainsi que, pour les meilleurs d'entre-eux, leur capacité à rentrer dans une démonstration subtile.

Les meilleurs candidats ont bien compris le problème. Une partie significative a produit une copie substantielle. L'étalonnage des notes est assez satisfaisant. Les correcteurs déplorent cependant un

1. La restriction sur le corps vient de l'utilisation d'arguments polynomiaux.

contingent assez fort de copies presque vides et une quantité surprenante de copies superficielles, qui donnent à beaucoup de questions des réponses sans aucun contenu, voire dépourvues de sens.

2.4.3 Conseils aux futurs candidats

Comme toujours, ce sujet récompensait le travail en profondeur du cours. Vu la multiplicité des objets algébriques considérés, il demandait une rigueur soutenue en matière de typage. Beaucoup de candidats semblent avoir perdu pied très rapidement faute d'avoir su prendre le recul nécessaire. Certains se sont arrêtés, d'autres ont produit des réponses contenant beaucoup de confusions. Soulignons qu'il est impératif, pour répondre à une question, d'avoir une conception claire des objets manipulés : confondre scalaires, vecteurs et applications linéaires ou considérer des produits de vecteurs fait très mauvaise impression !

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie ; l'algèbre linéaire repose sur des intuitions géométriques essentielles, manifestement insuffisamment perçues par la plupart des candidats. Nous leur recommandons également de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions faciles doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème. Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées.

2.4.4 Analyse détaillée des questions

Q1 - La réponse à cette question comportait plusieurs arguments très classiques : la possibilité de trigonaliser toute matrice carrée complexe, le calcul des termes diagonaux des puissances d'une matrice triangulaire supérieure, l'invariance de la trace par changement de base. La question a été massivement abordée, mais la nullité des termes diagonaux et l'invariance de la trace par similitude ont donné des résultats assez décevants.

Q2 - La question, elle aussi souvent traitée, demandait plusieurs vérifications, toutes simples. On relève assez fréquemment l'erreur grossière suivante : une combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents est nilpotente. La relation $u_{n-1} \neq 0$ est assez souvent oubliée. Enfin, trop peu de copies utilisent l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associé à une base.

Q3 - Beaucoup de candidats traitent correctement la première partie, très classique. La seconde, plus délicate, est souvent abordée de façon incomplète. Un nombre non négligeable de candidats pense conclure en énonçant qu'une famille obtenue par concaténation de deux familles libres est libre, ce qui traduit un manque de vision géométrique surprenant en fin de CPGE.

Q4 - L'inégalité $p \leq n$ et l'inclusion facile sont traitées dans beaucoup de copies. Le reste de la question, plus difficile s'est révélé très sélectif. Peu de candidats ont pensé à se placer dans une base judicieuse (en fait, de Jordan) donnée par la question 3.

Q5 - Cette question très simple et très classique (représentation des formes linéaires sur un espace euclidien) donne des résultats décevants. Dans de nombreuses copies, on trouve des réponses folkloriques à la première partie. La seconde consiste à vérifier la linéarité de φ_a à a fixé, la linéarité de l'application de E dans son dual, son injectivité, avant de conclure par égalité des dimensions ; ces vérifications, toutes très simples, sont rarement complètes.

Q6 - Question assez analogue dans son esprit à la précédente, moins classique toutefois. Le caractère abstrait des objets manipulés s'est révélé un obstacle infranchissable pour une grande partie des candidats.

Q7 - Plusieurs démonstrations étaient possibles pour cette question, qui laissait de l'initiative aux candidats : il était ainsi possible de raisonner dans une base orthonormée quelconque, ou dans une

base plus adaptée aux données de la question. La majorité des candidats a préféré passer à la question 8 ; parmi ceux qui ont abordé la question, une partie significative a produit un argument satisfaisant.

Q8 - Dans une écrasante majorité, les candidats répondent à cette question en utilisant la formule du binôme, sans remarquer que u et v ne sont pas supposés commuter. Une récurrence sur k donnait facilement l'existence ; les correcteurs ont généreusement noté des arguments moins formalisés mais corrects sur le fond. L'unicité, qui se ramenait à la détermination d'un polynôme réel par la donnée de la fonction polynomiale associée, a très rarement été rédigée de façon convaincante.

Q9 - Dans beaucoup de copies, la relation $(u + tv)^p = 0$, qui est un passage obligé, est à nouveau incorrectement justifiée par le caractère nilpotent d'une combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents. L'argument d'unicité est rarement explicité.

Q10 - La première partie de la question est souvent traitée. Cependant, les propriétés de la trace sont rarement explicitées et certains candidats se trompent sur le nombre de termes de la somme. La deuxième partie est traitée dans de bonnes copies.

Q11-12 - Ces deux questions concluent la partie III. Elles nécessitent une bonne compréhension des objets introduits et n'ont souvent reçu que des bribes de solution. Le fait que l'espace soit de dimension finie a rarement été invoqué pour justifier l'argument de biorthogonalité.

Q13 - Cette question, très simple, puisque tous les ensembles considérés sont des noyaux ou des images d'applications linéaires naturelles, a été fréquemment abordée, souvent avec un succès partiel. Beaucoup de candidats ont cependant fourni des démonstrations lourdes, voire incomplètes ou fausses (problèmes de typage sur l'espace ambiant).

Q14 - Cette question reposait sur deux applications successives du théorème du rang. Elle n'a été bien traitée que dans très peu de copies. Les correcteurs déplorent plusieurs solutions parfaitement fantaisistes, dans lesquelles il est difficile de voir autre chose que des tentatives d'escroquerie.

Q15-16 - Ces questions n'étaient pas difficiles pour qui avait assimilé la définition du produit tensoriel. Elles ont cependant rarement été bien traitées.

Q17 - L'argument de valeur propre a parfois été vu. On note par ailleurs, dans un certain nombre de réponses, l'apparition d'objets sans signification (puissance p -ième d'un vecteur).

Q18 - Question assez formelle, qui pouvait se traiter directement ou via une représentation matricielle par blocs. Beaucoup de candidats ont présenté ici un discours peu consistant.

Q19 - Des candidats en petit nombre ont su analyser les inégalités établies précédemment. La suite du problème n'a donné lieu qu'à du grappillage.

2.5 Mathématiques 2 - filière PC

2.5.1 Généralités et présentation du sujet

L'objectif de ce problème était de montrer que l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad P \in \mathbb{R}[X],$$

est dense dans l'espace des fonctions continues et de carré intégrable sur \mathbb{R} .

Pour éviter d'excessives difficultés techniques, on se limitait à approcher les fonctions continues, paires et support compact.

Le sujet avait été conçu pour être extrêmement progressif et balayer un grand nombre de chapitres du programme : fonctions d'une variable réelle, intégration, séries numériques et entières, produits scalaires et espaces euclidiens, espaces normés. Toute sa première partie (7 questions) est constituée uniquement de questions de cours ou très proches du cours. La deuxième partie (10 questions), consacrée à l'étude d'un espace de fonctions de carré intégrable pour un certain poids, et du produit scalaire associé,

exploite largement le cours d'analyse à une variable réelle. Elle demandait un peu plus d'initiative, tout en restant largement accessible. Le niveau de difficulté augmentait significativement dans la dernière partie, afin de permettre aux meilleurs candidats de s'exprimer. Les trois quarts des points du barème étaient concentrés sur les deux premières parties : il était donc possible d'obtenir une bonne note sans aborder la dernière partie.

Cette année encore, le jury a eu plaisir à lire des copies bien rédigées et clairement présentées, qui manifestaient une bonne compréhension du programme, voire une véritable autonomie intellectuelle. À l'inverse, les copies des candidats faisant preuve de négligence ou d'à-peu-près ont été corrigées sans indulgence.

2.5.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - Cette première question ne présentait pas de difficulté, mais elle a été maltraitée par un nombre non négligeable de candidats. Parmi les affirmations fausses le plus souvent lues, citons :

- la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (ou : se prolonge continûment en 0), donc « il n'y a pas de problème en 0 »,
- $t^{x-1}e^{-t} \sim e^{-t}$, ou $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t})$, quand $t \rightarrow +\infty$.

De nombreux candidats perdent du temps à discuter selon la position de x par rapport à 1. Quelques-uns reproduisent, bien qu'elle ne soit pas demandée, la preuve de la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$, mais beaucoup d'entre-eux omettent de justifier l'intégrabilité de la fonction dominante, ce qui revient à ne rien montrer du tout. Enfin, peu de candidats ont justifié la *stricte* positivité de la fonction Γ , se contentant d'un argument vague de « positivité de l'intégrale ». Dans le cadre du programme, il fallait indiquer que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ était *continue*, positive et non identiquement nulle (ou bien sûr strictement positive).

Q2 - Cette question a été le plus souvent bien traitée. Le jury attendait bien entendu le contrôle du terme tout-intégré $[-t^x e^{-t}]_\varepsilon^A$ quand $A \rightarrow +\infty$ (souvent bien vu) et $\varepsilon \rightarrow 0$ (assez souvent négligé).

Q3 - Certains candidats, soucieux de ne pas utiliser une « règle de d'Alembert adaptée aux séries entières », reviennent au cadre des séries numériques. Pourquoi pas, mais hélas, dans un certain nombre de cas, cela ne fait que révéler une mauvaise compréhension de cette règle : oubli des valeurs absolues, oubli de considérer la *limite* de $\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$ quand $n \rightarrow +\infty$, mauvaise exploitation de cette limite.

Finalement, un simple « $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$ donc le rayon de convergence vaut 1 » aurait été éventuellement discutable, mais plus efficace. Certains candidats écrivent également $a_n = \frac{(n+\alpha)!}{n!}$ sans se soucier du fait que α n'est pas supposé entier.

Q4 - Cette question a rarement été intégralement bien traitée. Pour justifier la permutation des symboles, il fallait justifier la convergence de la série de terme général $\int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{n!} x^n \right| dt$, qui découle de la convergence *absolue* de la série entière $\sum a_n x^n$ en tout point de $] -1, 1[$, ce que très peu de candidats ont vu. La convergence uniforme ou normale sur $] -1, 1[$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est souvent mentionnée, alors que d'une part elle est fautive, et que de toute façon elle n'a guère de rapport avec l'intervention d'une somme et d'une intégrale dont la variable est t . Certains candidats, plutôt que de suivre l'indication de l'énoncé, ont préféré utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-\alpha-1}$ sur $] -1, 1[$, solution que le jury a bien sûr accepté dès lors que suffisamment de

détails étaient donnés.

Q5 - Cette question de cours n'a pas eu beaucoup de succès : très peu de candidats écrivent que *comme F est de dimension finie*, on a $E = F \oplus F^\perp$, ce qui permettait ensuite de définir π_F . Au lieu de cela, le jury a souvent lu des formulations dénuées de sens (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur F est sa composante dans F ») ou des confusions sur la nature des objets (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur F est la plus petite distance à un vecteur de F »).

Q6 - Cette question de cours a, elle aussi, été très rarement bien traitée, beaucoup de candidats se limitant à indiquer qu'il s'agit d'une propriété du cours. Il fallait essentiellement expliquer que $\langle \pi_F(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$ pour $1 \leq i \leq n$. Certains candidats ont donné des preuves correctes en supposant E de dimension finie, qui ont été partiellement valorisées.

Q7 - Cette question de cours a été mieux traitée que les deux précédentes, mais l'argument essentiel ($\pi_F(x)$ et $x - \pi_F(x)$ sont orthogonaux) n'apparaît pas toujours clairement. Un nombre non négligeable de candidats pense que x et $\pi_F(x)$ sont orthogonaux.

Q8 - Les candidats obtiennent en général l'inégalité $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, mais beaucoup appliquent hélas ensuite la valeur absolue à cette inégalité pour obtenir « en force » le résultat.

Q9 - Dans cette question, le jury a constaté une *recrudescence sans précédent* de l'usage imprudent de la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx$ avant d'avoir justifié la convergence de l'intégrale. Il est vrai que, « dans la vraie vie », on montre souvent qu'une fonction *positive* est intégrable en majorant son intégrale (qui existe *a priori* dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) par une quantité finie. Toutefois, ce genre de rédaction n'est pas dans l'esprit du programme de la filière PC, et l'argument devient franchement folklorique en l'absence de l'hypothèse de positivité, ce qui n'émeut guère un certain nombre de candidats pour qui les statuts des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x) g(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx$ ne sont pas fondamentalement différents. Une rédaction plus soignée (majoration de $|x^\alpha e^{-x} f(x) g(x)|$ pour $x > 0$) était ici attendue.

Q10 - Même remarque qu'à la question précédente.

Q11 - Le plus simple était de constater que, pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^n$ est élément de E_α grâce à la question **Q1**, et de conclure alors grâce à la question **Q10**. Beaucoup de candidats se perdent dans des rédactions inutilement longues et compliquées. Signalons également l'identité fantaisiste

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 x^{2i},$$

trop fréquemment trouvée dans les copies.

Q12 - Question le plus souvent très bien traitée.

Q13 - La façon la plus simple de traiter cette question était d'utiliser la formule de Leibniz. Faute d'y avoir songé, de nombreux candidats se sont lancés dans des récurrences pesantes et en général incomplètes, voire franchement malhonnêtes : certains candidats ne parvenant pas à conclure pensent s'en sortir en expliquant « qu'on pourrait montrer, par une *autre* récurrence, que... ». Tout cela a inévitablement été sanctionné. Signalons enfin que $n + \alpha$, pas nécessairement entier, ne peut être le degré d'aucun polynôme.

Q14 - Pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$, beaucoup de candidats oublient de mentionner la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$, en plus de sa positivité. Davantage encore oublient de justifier que si f est nulle sur $]0, +\infty[$, elle l'est sur $[0, +\infty[$ par continuité. Signalons enfin un curieux argument basé sur le fait « qu'un polynôme (lequel ?) ayant une infinité de racines est nul ».

Q15 - Mêmes remarques qu'à la question **Q13**.

Q16 - D'assez nombreux candidats ont bien traité cette question, en effectuant n intégrations par parties successives, et en notant que les termes tout-intégrés étaient nuls grâce à la question précédente.

Q17 - Cette question a donné lieu à d'assez nombreuses escroqueries pour faire surgir miraculeusement la factorielle de n . Pour la traiter correctement, il fallait disposer du degré et du coefficient dominant du polynôme ψ_n .

Q18 - Cette question délicate a rarement été abordée avec succès.

Q19 - Beaucoup de candidats concluent abusivement en conjecturant (ce qui est vrai !) que la somme de la question précédente vaut $\|f_k\|_\alpha^2$.

Les questions suivantes ont rarement été abordées.

2.6 Mathématiques 1 - filière PSI

2.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose la preuve du théorème suivant.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de E . On suppose que tous les éléments de V sont nilpotents et que V est de dimension $n(n-1)/2$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de tous les endomorphismes de V est triangulaire supérieure stricte.

Ce problème, très long, mêle algèbre linéaire, réduction et algèbre euclidienne (afin d'éviter la dualité). Le niveau conceptuel de l'épreuve est élevé. La présence de nombreuses questions proches du cours a cependant permis une bonne évaluation des candidats.

Les résultats, théorèmes et techniques du programme ne sont pas toujours maîtrisés ; on ne saurait trop insister sur l'intérêt primordial qu'il y a à travailler le cours.

Les correcteurs ont été surpris par le manque de rigueur, ce qui est particulièrement flagrant en algèbre, ainsi que de soin dans la présentation. Les démonstrations, qualifiées d'évidentes, sont laissées au lecteur ; il n'est pas explicitement fait référence aux questions utilisées ; les quantificateurs sont utilisés de façon inadéquate ; les résultats et points importants sont rarement soulignés ou encadrés ; les copies sont trop souvent sales et pleines de ratures.

Nous conseillons vivement aux futurs candidats de tenir compte de ces diverses remarques.

A2019 – MATH I PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Comportement asymptotique de sommes de séries entières

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x \quad (H_{r,p})$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geq 2$. Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x , c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$.
2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x \in \mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x := \frac{X_x}{x}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_{x,N} := \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x - 1) \cdots (X_x - N + 1).$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}((Z_x)^r)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.
4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x . Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$(1 - x^{-1/3})^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq \mathbf{E}((Z_x)^r).$$

Montrer en outre que

$$(1 - x^{-1/3})^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$

7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels a_1, \dots, a_N tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, (X_x)^N = \sum_{k=1}^N a_k Y_{x,k}.$$

On pourra introduire la famille $(H_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbf{N}^*, H_j = \prod_{i=0}^{j-1} (T - i),$$

où l'indéterminée est notée T .

En déduire que

$$\mathbf{E}((Z_x)^N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

8. On pose $N := [r]$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0, (Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}.$$

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$\mathbf{E}((Z_x)^r) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geq 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!} x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x . En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x .

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x + \alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k ,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}.$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k ,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, |D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x , montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

IV Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E) : \quad t x''(t) - x(t) = 0.$$

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur \mathbf{R} à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f , qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

- (i) La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
- (ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, b_n > 0$.
- (iii) Les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r, p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{t}}.$$

FIN DU PROBLÈME

A2019 – MATH II PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notations

- On note $[x]$ la partie entière d'un réel x .
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble \mathbf{Z} des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur \mathbf{R} .
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3. Montrer que la fonction \widehat{f} est bien définie, et continue sur \mathbf{R} .

II Étude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi_h : \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5. Montrer que

$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt.$$

6. Montrer que, pour tous $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1 + (t-1)^2}.$$

7. En déduire que

$$S(h) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de \mathbf{R} vers \mathbf{C} . Si u est un élément de $C_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt} dt \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $C_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et } |\hat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2 + 1} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R},$$

où la fonction \hat{f} a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π -périodique et continue sur \mathbf{R} .
10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π -périodique et continue sur \mathbf{R} .
11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2n\pi),$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a , on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ i & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbf{R} . On pourra utiliser un développement en série entière.
14. Etablir que $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.
15. Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente.
16. Montrer que $\hat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

Préciser la valeur de b , et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).

18. Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.
19. Dédire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π , et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

FIN DU PROBLÈME

des concours, voilà l'attitude qui permettra aux étudiants de réussir. Car comme disait Amy Sherald : « *People who don't quit eventually rise to the top, because the world is full of quitters* ».

1.4. Mathématiques I — PC

Présentation du sujet

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

Le but essentiel de ce problème est d'établir le résultat suivant.

Théorème 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

La partie I justifie le fait que la série entière définissant $S_{r,p}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et fait calculer $S_{0,1}$ et $S_{0,2}$ au moyen de fonctions usuelles.

La partie II est consacrée à la démonstration du théorème pour $p = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit X_x une variable de Poisson de paramètre x . La démonstration part de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad S_{r,1}(x) = e^{-x} E(X_x^r).$$

On utilise alors la concentration de X_x autour de x pour montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $E(X_x^r) \sim x^r$. Le calcul combine l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'utilisation ingénieuse d'un argument de convexité.

La partie III achève la démonstration du théorème 1. Un argument classique permet d'extraire de $S_{r,1}$ la somme correspondant aux multiples de p :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad S_{r,p}(z) = \frac{1}{p} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} S_{r,1}(\omega z).$$

Il faut alors voir que, pour ω dans $\mathbb{U}_p \setminus \{1\}$, $S_{r,1}(\omega z)$ est négligeable devant $S_{r,1}(z)$ lorsque z tend vers $+\infty$, ce qui provient d'une transformation d'Abel et d'estimations asymptotiques non immédiates des quantités $u_{k+1}(x)$, où l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n(x) = \frac{n^r}{n!} x^n.$$

La partie IV applique le théorème obtenu à la démonstration de l'énoncé ci-après.

Théorème 2. Soit f l'unique solution de l'équation différentielle $\forall t \in \mathbf{R}, tx''(t) - x(t) = 0$, développable en série entière sur \mathbf{R} et telle que $f'(0) = 1$. Alors

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp(2\sqrt{t}).$$

La preuve de ce dernier résultat est très simple : on calcule les coefficients du développement en série entière de f , on les estime via la formule de Stirling et on combine le théorème 1 au lemme de comparaison asymptotique des séries entières, admis par l'énoncé.

Commentaires généraux

Le sujet, d'un intérêt mathématique soutenu, nécessite une bonne maîtrise des thèmes suivants : séries, séries entières, calcul asymptotique, probabilités. Il teste les candidats de manière significative sur les programmes d'analyse et probabilités des deux années. L'énoncé, bien calibré, comprend des questions de niveau très varié. Il permet d'évaluer les qualités techniques des candidats, leur connaissance et leur compréhension du cours, ainsi que leur capacité à rentrer dans une démonstration assez complexe.

Le texte a donc fort bien joué son rôle. Les meilleurs candidats ont compris l'ensemble du problème. Une partie significative a produit une copie de bon niveau. Enfin, l'étalonnage des notes est satisfaisant. Les correcteurs déplorent cependant un contingent assez fort de copies presque vides et une quantité surprenante de copies superficielles, qui donnent à beaucoup de questions des réponses sans aucun contenu.

Conseils aux futurs candidats

Comme d'habitude, ce sujet récompensait le travail du cours. Certaines questions de probabilités, a priori simples, ont mis en évidence un travail insuffisant de ce chapitre. Le caractère assez technique de l'épreuve a valorisé les candidats solides. Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à ne pas manipuler aveuglément les objets mathématiques.

D'un point de vue plus technique, on souligne les points suivants.

- Les premières questions d'un problème sont souvent simples. C'était le cas ici. Il importe de ne pas se précipiter et de les rédiger correctement.
- Les probabilités appellent une rédaction aussi précise que les autres parties des mathématiques ; les justifications doivent s'appuyer sur des arguments précis.
- Les bases de l'analyse (majorations, estimations asymptotiques) sont au cœur d'une grande part des mathématiques ; on ne les acquiert que par une pratique assidue du calcul. Beaucoup de candidats en ont seulement une faible maîtrise.

Analyse détaillée des questions

Question 1. Les réponses s'appuient majoritairement sur la règle de d'Alembert, qui est en effet applicable. En revanche, les simplifications des quotients de factorielles sont assez souvent fausses. Les réponses à base de croissance comparée, dont le principe est évidemment correct, sont rarement assez précises.

Question 2. Le développement en série entière de l'exponentielle est le plus souvent connu, celui du cosinus hyperbolique un peu moins. Mais bon nombre de candidats oublient que les séries considérées n'ont pas de terme d'indice 0.

Question 3. Question proche du cours, rarement bien traitée. Une moitié des candidats donnent une réponse correcte, mais la plupart oublie de vérifier l'absolue convergence, nécessaire pour appliquer le théorème de transfert.

Question 4. Espérance et variance sont le plus souvent connues ; quelques candidats perdent du temps à les redémontrer. En revanche, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas toujours bien énoncée, et l'application n'est vraiment bien faite que dans un tiers des copies.

Question 5. Pour la première partie de la question, beaucoup de candidats évoquent l'inégalité de Markov, mais peu l'appliquent bien. Il faut d'une part choisir la bonne variable aléatoire (Z_X^r), d'autre part vérifier l'égalité d'événements, enfin mentionner la positivité de Z_X^r et celle de $1 - X^{1/3}$. L'oubli de ces précisions obérait fortement la note attribuée. La seconde partie de la question est souvent l'objet de tentatives de bluff.

Question 6. Bilan très décevant pour cette question simple. Beaucoup des candidats décrètent les variables aléatoires $X_X - i$ indépendantes, ou utilisent une version fantaisiste de la linéarité de l'espérance. Certains affirment qu'une constante est d'espérance nulle. Ce type de passage en force témoigne à tout le moins d'un grand manque de rigueur et n'incite pas le correcteur à l'indulgence pour la suite de la copie.

Question 7. Résultat très inégal pour la première partie de la question. Un nombre significatif de candidats voit qu'il s'agit essentiellement de décomposer un polynôme sur une base. La seconde partie est assez largement réussie.

Question 8. Un taux de réponse assez décevant pour la première partie de la question. La seconde est mieux traitée.

Question 9. Question testant la compréhension du sujet, dans laquelle il s'agit de combiner correctement certains des résultats précédent, réussie par une partie appréciable des candidats.

Question 10. La première partie de la question a été très souvent abordée, mais les calculs ont parfois été fantaisistes. Dans certaines copies, la dérivée d'un produit est le produit des dérivées. Dans d'autres, le tableau de variation est faux. Il semble que la présence d'un paramètre ait souvent posé problème, ce qui est étonnant à ce niveau d'études ; pas mal de copies contiennent d'ailleurs des inégalités fausses ($r > 0$ donc $1 - r > 1 \dots$). La seconde partie, bien traitée dans un nombre convenable de copies, a parfois donné lieu à des réponses non argumentées.

Question 11. La première partie, qui n'est qu'un développement limité simple, a reçu très peu de réponses correctes. La suite, délicate, a été peu abordée et n'a presque jamais donné lieu à des réponses valables.

Question 12. Beaucoup d'erreurs dans les calculs asymptotiques, du type : « $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à $\lfloor x \rfloor + k$, donc $\lfloor x \rfloor!$ est équivalent à $(\lfloor x \rfloor + k)!$ ». Les réponses utilisant la formule de Stirling ont rarement été convaincantes ; cette méthode est ici (comme pour Q1) assez maladroite.

Question 13. Pour la première partie, beaucoup de candidats donnent des réponses fausses, en invoquant la décroissance de la suite, qui contredit pourtant le résultat de Q10 !

Question 14. Cette question n'a été bien traitée que dans peu de copies.

Question 15. Cette question, souvent abordée, a été bien traitée dans une petite moitié des copies.

Questions 16 et 17. Les calculs assez subtils de ces questions ont été abordés dans quelques excellentes copies. Quelques candidats ont par ailleurs grappillé des points sur les conclusions, qui étaient très simples.

Question 18. Question souvent abordée, mais rarement traitée dans son intégralité. La relation de récurrence est en général obtenue, l'expression de c_n ne suit pas toujours. La justification des calculs (dérivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence) est rarement mentionnée.

Question 19. Il s'agissait d'appliquer la formule de Stirling. Une partie des candidats l'a vu et a cité correctement la formule. Plus rares sont ceux qui ont mené la question à son terme.

Question 20. Cette ultime question n'était pas difficile pour qui avait compris la logique du texte ; elle a reçu quelques bonnes réponses.

1.5. Mathématiques II — PC

Le sujet de la deuxième épreuve PC était consacré à l'étude d'une somme de série de fonctions, que Riemann aurait proposée, dans les années 1860, comme exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable. En réalité, les travaux de Hardy (1916) et de Gerver (1968) ont permis de montrer que la fonction R de l'énoncé est dérivable exactement en les réels de la forme πr , où r est un rationnel à numérateur et dénominateur tous deux impairs.

L'énoncé se limitait à montrer la non-dérivabilité de R en 0 par des moyens élémentaires, et sa dérivabilité en π par une méthode basée sur l'utilisation de la formule sommatoire de Poisson. Il avait été conçu :

- pour mettre en œuvre une grande partie du programme d'analyse de deuxième année,
- pour mettre en valeur les candidats ayant une bonne connaissance du cours et des méthodes de base du programme.

C'est ainsi que la première partie était constituée uniquement de questions très élémentaires, applications directes des théorèmes du cours. Ces questions ont été significativement valorisées dans le barème. Bien entendu, pour obtenir tous les points, il fallait vérifier soigneusement toutes les hypothèses des théorèmes utilisés, et ne pas oublier les valeurs absolues ou les modules, qui y jouaient un rôle central.

Peut-être parce qu'il abordait des thèmes sur lesquels la majorité des candidats est très entraînée et assez à l'aise, ce problème a été mieux réussi que ceux des années précédentes. Parmi les motifs de satisfaction du jury, notons une bonne compréhension assez générale de la notion de convergence absolue (des séries et des intégrales), qui était au cœur du sujet.

Parmi les points à consolider, le jury regrette le manque de familiarité avec l'exponentielle complexe d'un trop grand nombre de candidats, qui se sentent obligés de revenir systématiquement aux fonctions *cos* et *sin*. Ce choix regrettable est souvent générateur de perte de temps, la fonction exponentielle se comportant de façon bien plus agréable à de nombreux égards !

Passons à l'examen détaillé des questions.

Question 1. Le plus efficace était de montrer la convergence normale de la série (qui implique sa convergence simple, donc l'existence de la fonction R), sans oublier de mentionner la continuité du terme général. Certains candidats rédigent cette question de façon trop elliptique, concluant directement à la continuité de la fonction R à partir de la majoration de $\left| \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, sans citer la *notion* de convergence normale.

Question 2. Cette question a été en général plutôt bien traitée (prolongement continu en 0 et convergence absolue sur $[1; +\infty[$). Il fallait évidemment prendre garde à ne pas affirmer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Question 3. Le théorème de continuité sous le signe intégrale montre à la fois la bonne définition de la fonction \hat{f} et sa continuité. Ici encore, le rôle des valeurs absolues était décisif, et le jury a trop souvent lu des inégalités entre nombres complexes.

Question 4. Certains candidats croient montrer l'existence de la somme $S(h)$ en majorant... $|S(h)|$. Heureusement, l'argument de convergence absolue a très souvent été donné.

Question 5. De très nombreux candidats ont décelé dans cette question une analogie avec les sommes de Riemann, à ceci près que l'intégrale de ϕ_h doit être vue ici comme une somme de Riemann (certes sur un intervalle non borné), et non une limite de sommes de Riemann. Pour rédiger correctement les choses, il fallait d'abord noter que la fonction ϕ_h est constante sur chaque intervalle $[nh; (n+1)h[$, ($n \in \mathbb{N}$) puis utiliser la relation de Chasles.

Question 6. Cette question a donné lieu à des inégalités folkloriques ($x \leq [x]$), voire ouvertement malhonnêtes, qui ont été inévitablement sanctionnées. Les correcteurs ont été

attentifs à une utilisation correcte de la partie entière ($\lfloor x \rfloor \geq x - 1$) et au rôle de la précision $h \leq 1$.

Question 7. Un grand nombre de candidats a pensé à utiliser le théorème de convergence dominée (sans, hélas, toujours le nommer, cf. la question 1), dont il fallait bien sûr vérifier soigneusement toutes les hypothèses. Or, la justification de la convergence simple de ϕ_h vers f , ainsi que l'hypothèse de domination sur $[0, 1]$, ont été souvent oubliées.

Question 8. Une fois obtenu l'équivalent $R(x) \sim \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$, $x \rightarrow 0^+$, celui-ci implique la non-dérivabilité de R en 0.

Question 9. L'existence et la 2π -périodicité de F ont en général été correctement établies. La continuité de F était plus délicate à montrer : elle découlait de la convergence normale de la série définissant F non pas sur \mathbb{R} (sauf si f est nulle !), mais sur tout segment de \mathbb{R} . Celle-ci a été rarement correctement justifiée.

Question 10. Cette question a été en général bien traitée. Il convenait de ne pas s'y éterniser !

Question 11. Beaucoup de candidats songent à utiliser l'injectivité de la transformation de Fourier, qui était admise par l'énoncé. Pour calculer les coefficients de Fourier de $2\pi F$ et G , il fallait justifier la possibilité d'intégrer terme à terme, puis calculer $\int_0^{2\pi} e^{-int} dt, n \in \mathbb{Z}$.

Question 2. Cette question a été très rarement bien traitée, très peu de candidats pensant à appliquer le résultat de la question précédente à une autre fonction que f . Bien entendu, on ne pouvait « choisir $a = 2\pi$ ».

Question 13. Pour montrer que la fonction f est C^∞ sur \mathbb{R} , il suffisait de l'écrire comme la somme d'une série entière. Les calculs, très simples, n'ont pas toujours été menés à leur terme. On a même parfois lu que « la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est C^∞ sur \mathbb{R} ».

Question 14. Les difficultés de nombreux candidats avec l'exponentielle complexe les ont empêchés d'obtenir des expressions correctes des deux premières dérivées de f . On pouvait détecter de grossières erreurs de calcul en se souvenant que f' (resp. f'') est une fonction impaire (respectivement paire). La justification des convergences vers 0 de f' et f'' à l'infini a parfois donné lieu à d'étonnantes inégalités entre nombres complexes.

Question 15. Pour traiter cette question, on pouvait ou bien intégrer par parties (dans le bon sens !) ou bien, plus judicieusement, utiliser l'estimée :

$$e^{ix^2} = -\frac{1}{4}f''(x) + O(x^{-2})$$

en prenant garde au fait que l'intégrale de f'' sur \mathbb{R} n'est que semi-convergente.

Question 16. Les candidats ayant abordé cette question se sont souvent arrêtés après la double intégration par parties.

A2018 – MATH I PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Théorème de Komlós

Notations :

- Si x est un nombre réel on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x .
- On appelle cardinal de l'ensemble fini E le nombre de ses éléments, que l'on note $|E|$.
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E .
- Dans tout le problème on identifiera \mathbf{R}^n à l'espace des matrices lignes $M_{1,n}(\mathbf{R})$ et on notera $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs, soit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

les x_j, y_j étant les composantes de x, y respectivement.

- Si \mathcal{V} est un sous-ensemble de \mathbf{R}^n on note $\text{Vect}(\mathcal{V})$ l'espace vectoriel engendré par \mathcal{V} . On note \mathcal{V}^\perp l'orthogonal de \mathcal{V} , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $\forall x \in \mathcal{V}, \langle x, y \rangle = 0$.
- Si M est une matrice carrée de nombres réels, on note $\det(M)$ son déterminant.

Dans tout le problème on pourra utiliser librement la formule de Stirling que l'on rappelle :

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Définition 1 (Espace de Rademacher) Si $n, q \in \mathbf{N}^*$, on note

$$\Omega_{q,n} = \left\{ \omega = (\omega_{i,j}, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n) \text{ tels que } \omega_{i,j} = \pm 1, \forall i, j \right\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on introduit la variable aléatoire $M_{i,j}$ telle que

$$\begin{aligned} M_{i,j} : \Omega_{q,n} &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega &\longmapsto \omega_{i,j}. \end{aligned}$$

On munit $\Omega_{q,n}$ de la probabilité uniforme \mathbf{P} . Cela signifie que les variables aléatoires $(M_{i,j}, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n)$ sont indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(M_{i,j} = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(M_{i,j} = -1).$$

Si $q = n$, on note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & \cdots & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note $L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ les vecteurs lignes de $M^{(n)}$. Par construction, ce sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi.

Le but du problème est de démontrer, qu'ainsi construite, une matrice aléatoire est inversible avec forte probabilité quand n est grand :

Théorème 1 (Komlós) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\det M^{(n)} = 0) = 0$.

A Coefficients binomiaux

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$: montrer que l'application

$$k \mapsto \binom{n}{k}$$

est croissante sur $\{0, \dots, [n/2]\}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

2. Trouver un équivalent de $\binom{n}{[n/2]}$ quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

3. Montrer que pour tout entier non nul n et tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k.$$

On note $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ la base canonique de \mathbf{R}^n et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. On identifie $\Omega_{1,n}$ et le sous-ensemble de \mathbf{R}^n

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i, (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_{1,n} \right\}.$$

4. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, exprimer e_i en fonction de v et $v - 2e_i$. En déduire que $\text{Vect}(\Omega_{1,n}) = \mathbf{R}^n$.

B Dimension 2

5. Déterminer l'espérance de $\det M^{(2)}$.
6. Montrer que la variance de $\det M^{(2)}$ est égale à 2.
7. Calculer $\mathbf{P}(\det M^{(2)} = 0)$.

C Quelques bornes

On suppose dorénavant $n \geq 2$.

8. Quelle est la probabilité que les deux premières lignes de $M^{(n)}$ soit égales ou opposées ?

En déduire que $\mathbf{P}(\det M^{(n)} = 0) \geq 2^{1-n}$ si $n \geq 2$.

9. Soient l_1, \dots, l_n des vecteurs non nuls de \mathbf{R}^n . Montrer que ces vecteurs sont liés si et seulement si, il existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que

$$l_{j+1} \in \text{Vect}(\{l_1, \dots, l_j\}).$$

En déduire que

$$\mathbf{P}(\det M^{(n)} = 0) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})). \quad (2)$$

Soit \mathcal{H} un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n de dimension d . On rappelle que \mathcal{H}^\perp est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et que $(\mathcal{H}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$.

10. Montrer alors qu'il existe des réels $(\alpha_{i,j}, 1 \leq i \leq n-d, 1 \leq j \leq n)$ tels que

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H} \iff \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \dots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant le pivot de Gauss, montrer qu'il existe $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ tel que pour tout $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d$ il existe un unique $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $x_{i_k} = y_k$ pour $k = 1, \dots, d$.

12. En déduire que

$$\mathbf{P}(L_1^{(n)} \in \mathcal{H}) \leq 2^{d-n},$$

puis que pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\mathbf{P}(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})) \leq 2^{j-n}. \quad (3)$$

Indication : on pourra utiliser la conséquence suivante de la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})\right) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(l_1, \dots, l_j) \mid L_1^{(n)} = l_1, \dots, L_j^{(n)} = l_j\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \times \mathbf{P}(L_1^{(n)} = l_1, \dots, L_j^{(n)} = l_j) \end{aligned}$$

et l'indépendance des vecteurs lignes.

Soit $q < n$ et $\omega \in \Omega_{q,n}$. On note l_1, \dots, l_q ses vecteurs lignes.

13. Montrer que l'on peut trouver un vecteur non nul orthogonal à $\text{Vect}(l_i, i = 1, \dots, q)$ qui soit à coordonnées dans \mathbf{Z} .

D Théorème de Erdős-Littlewood-Offord

Définition 2 Soit n un entier non nul. Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. On dit que \mathcal{A} est une anti-chaîne si deux éléments distincts A, B quelconques de \mathcal{A} sont incomparables, c'est-à-dire tels que A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A .

Commençons par un exemple. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et \mathcal{A}_k l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k .

14. Montrer que \mathcal{A}_k est une anti-chaîne et que

$$|\mathcal{A}_k| \leq \binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}},$$

la deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Définition 3 Soit \mathcal{A} une anti-chaîne et $A \in \mathcal{A}$, de cardinal noté $|A|$. On note \mathcal{S}_A , l'ensemble des bijections σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même telles que la restriction de σ à $\{1, \dots, |A|\}$ soit une bijection de $\{1, \dots, |A|\}$ dans A .

15. Quel est le cardinal de \mathcal{S}_A ?
16. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $B \neq A$. Montrer que $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B = \emptyset$.
17. En déduire que si a_k désigne, pour $k \leq n$, le nombre d'éléments de \mathcal{A} de cardinal k , alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

18. Montrer que

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $v_j \geq 1$, pour tout $j = 1, \dots, n$. Si $A \subset \{1, \dots, n\}$ on pose

$$s_A = \sum_{j \in A} v_j - \sum_{j \in A^c} v_j$$

où A^c est le complémentaire de A dans $\{1, \dots, n\}$.

19. Montrer que si $A \subset B \subset \{1, \dots, n\}$, $A \neq B$, alors

$$s_B - s_A \geq 2.$$

20. Soit J un intervalle ouvert de \mathbf{R} de longueur 2 : montrer que si n est assez grand alors

$$\mathbf{P}(\langle L_1^{(n)}, v \rangle \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que cette propriété reste vraie si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|v_j| \geq 1$.

Indication : construire une bijection entre $\Omega_{1,n}$ et l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$. Construire une anti-chaîne intéressante.

E Universalité

Dans tout ce qui suit, k est un entier inférieur à n .

Définition 4 Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$. L'ensemble \mathcal{V} est dit k -universel si pour tous les k -uplets $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ et tout $\omega \in \Omega_{1,n}$, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que

$$v_{j_m} = \omega_{1,j_m}, \text{ pour tout } m = 1, \dots, k.$$

21. Soit $d \in \{1, \dots, n\}$. Montrer l'inclusion

$$\begin{aligned} & \left\{ \{L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel} \right\} \\ & \subset \bigcup_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^d \bigcup_{m=1}^k \{M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m}\}. \end{aligned}$$

(On rappelle que $L_i^{(n)} = (M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$).

22. Montrer que la probabilité que $\{L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)}\}$ ne soit pas k -universel est majorée par

$$\binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-k})^d.$$

23. En déduire que si $d \geq n/2$ et $k \leq \ln n$, alors, pour n assez grand,

$$\mathbf{P}\left(\{L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\right) \leq \frac{1}{n}. \quad (4)$$

24. Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$ un ensemble k -universel tel qu'il existe $v \in \mathcal{V}^\perp \setminus \{0\}$: montrer que v a au moins $k + 1$ coordonnées non nulles.

En vertu de la question 13, on peut supposer que les coordonnées de v sont des entiers relatifs.

25. Montrer que si k est assez grand

$$\mathbf{P}\left(L_1^{(n)} \in \text{Vect}(\mathcal{V})\right) \leq \mathbf{P}\left(\langle L_1^{(n)}, v \rangle = 0\right) \leq k^{-1/2}. \quad (5)$$

Soit $(t_n, n \in \mathbf{N})$ une suite croissante d'entiers telle que $t_n/n \rightarrow 0$.

26. Montrer que si n est assez grand alors $n - t_n \geq n/2$ et

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})\right) \leq \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}. \quad (6)$$

Indication : on distinguera les cas selon que $\text{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})$ est k -universel ou pas et l'on prendra $k = \lceil \ln n \rceil$.

F Théorème de Komlós

27. En déduire le théorème de Komlós.

Indication : on pourra partir de (2) et choisir convenablement une suite $(t_n, n \geq 1)$.

FIN DU PROBLÈME

A2018 – MATH II PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Fonctions harmoniques

Soit U un ouvert du plan \mathbf{R}^2 , soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Son **laplacien** Δf est alors défini sur U par

$$\forall (x, y) \in U \quad \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

La fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est dite **harmonique** sur U si elle est de classe \mathcal{C}^2 et de laplacien nul sur U , i.e. $\Delta f = 0$.

I Noyau de Dirichlet

Pour n entier naturel et t réel, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n e^{ikt} + \sum_{k=1}^n e^{-ikt}.$$

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$ pour tout n entier naturel.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et t réel non multiple entier de 2π , prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u) \sin(\alpha u) du$$

tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, de classe \mathcal{C}^2 et 2π -périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx.$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u) D_n(u) du .$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du ,$$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

On admettra que cette fonction h_t est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$.

6. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$c_n(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } c_{-n}(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g) e^{-int} .$$

II Coordonnées polaires

Le plan \mathbf{R}^2 est muni de sa norme euclidienne canonique. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ harmonique sur U , où U est un ouvert de \mathbf{R}^2 . Soit $m_0 = (x_0, y_0)$ un point de U , soit $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B(m_0, \delta)$ soit incluse dans U . Pour $(r, t) \in]-\delta, \delta[\times \mathbf{R}$, on pose

$$g(r, t) = f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) .$$

8. Montrer que la fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\delta, \delta[\times \mathbf{R}$. Vérifier, sur $] -\delta, \delta[\times \mathbf{R}$, la relation

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} = - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} .$$

Cette relation pourra éventuellement être admise pour traiter la suite du problème.

Pour $r \in [0, \delta[$, on pose

$$J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt.$$

9. Montrer que l'application J est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[0, \delta[$. Prouver la relation

$$\forall r \in [0, \delta[\quad r J''(r) + J'(r) = 0 .$$

10. En déduire que l'application J est constante sur $[0, \delta[$.

III Problème de Dirichlet

Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction harmonique à valeurs réelles sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 . On suppose que la fonction f admet un extremum global en un point m_0 de U .

11. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U .

Soit $f : K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré fermé $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, harmonique sur son intérieur $U = \overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, et nulle sur la frontière $\text{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$ de ce carré.

12. Montrer que f est nulle sur K .

Dans la fin de cette section III, on cherche à construire une fonction $f : K \rightarrow \mathbf{R}$, avec $K = [0, 2\pi]^2$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1 f est continue sur le carré fermé K ;
- 2 f est harmonique sur le carré ouvert $\overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[^2$;
- 3 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 0) = \sin(x)$;
- 4 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 2\pi) = 0$;
- 5 $\forall y \in [0, 2\pi], \quad f(0, y) = f(2\pi, y) = 0$.

13. Construire une fonction f_0 vérifiant ces conditions et qui soit de la forme $f_0(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$, où φ et ψ sont deux fonctions continues de l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers \mathbf{R} . Montrer ensuite que cette fonction f_0 est l'unique solution du problème posé.

IV Développement en série

Soit $f : D(0, R) \rightarrow \mathbf{C}$ harmonique, où $D(0, R)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon R , avec $R \in]0, +\infty[$. On posera $D(0, +\infty) = \mathbf{R}^2$. Pour $r \in [0, R[$ et n entier relatif, on pose

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos t, r \sin t) e^{-int} dt .$$

14. En utilisant les calculs faits dans la question 8, montrer que la fonction v_n est solution sur $[0, R[$ de l'équation différentielle

$$(E_n) : \quad r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0 .$$

15. Résoudre l'équation (E_n) sur $]0, R[$ en utilisant le changement de variable $r = e^s$.
16. En déduire, pour tout n entier relatif, l'existence d'un coefficient complexe a_n tel que l'on ait $v_n(r) = a_n r^{|n|}$ sur $[0, R[$.

17. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r e^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (r e^{-it})^n .$$

18. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction harmonique bornée sur \mathbf{R}^2 . Montrer que f est constante.

V Théorème de D'Alembert-Gauss

Dans cette dernière partie, on considère un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, supposé non constant. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = P(x + iy) .$$

19. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ à l'aide des polynômes dérivés P' et P'' . Montrer que la fonction f est harmonique sur \mathbf{R}^2 .
20. Soit U un ouvert du plan sur lequel f ne s'annule pas. Montrer que la fonction $g = 1/f$ est harmonique sur U .
21. Montrer qu'il existe un réel positif A tel que, pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq A$, on ait $|P(z)| \geq 1$.
22. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss dont on rappellera l'énoncé précis.

FIN DU PROBLÈME

1.2.3. Mathématiques I — PC

Présentation du problème

Ce problème a pour but d'établir le résultat suivant dû à Komlòs (1967).

Théorème. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_{i,j}^n)_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. Soit M_n la matrice aléatoire $M_n = (X_{i,j}^n)_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors

$$P(M_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Le sujet commence par quelques questions simples, dont certaines sont utiles dans la suite, qui recouvrent l'ensemble des thèmes abordés dans le problème (inégalités, asymptotique, algèbre linéaire, probabilités et combinatoire). Les questions 5, 6, 7 permettent de se familiariser avec les matrices M_n dans le cas simple $n = 2$. À partir de la question 8, on rentre dans la démonstration du théorème de Komlòs.

Nous allons décrire dans ce préambule les grandes lignes de cette démonstration.

Nous noterons L_1^n, \dots, L_n^n les lignes de M_n . Le point de départ est l'inégalité suivante, qui résulte immédiatement de la sous-additivité de P :

$$P((M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R}))) \leq \sum_{j=1}^n P(L_j^n \in \text{Vect}(L_1^n, \dots, L_{j-1}^n)).$$

On combine alors les arguments suivants :

- Un énoncé déterministe d'algèbre linéaire assure qu'un sous-espace de dimension d de \mathbb{R}^n contient au plus 2^d vecteurs à coordonnées ± 1 . L'indépendance des L_j^n permet d'en déduire, pour j dans $\{1, \dots, n\}$, la majoration

$$P(L_j^n \in \text{Vect}(L_1^n, \dots, L_{j-1}^n)) \leq \frac{1}{2^{n-j+1}}.$$

Ce fait est établi à la question 12 du problème.

- La majoration précédente n'est pas bonne lorsque j est proche de n . Il faut utiliser dans ce cas un argument plus subtil, qui tient compte du caractère aléatoire des espaces

$$\text{Vect}(L_1^n, \dots, L_j^n) \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

On exploite l'aléa en utilisant un résultat combinatoire classique. Appelons antichaîne sur $\{1, \dots, n\}$ toute sous-partie de $P(\{1, \dots, n\})$ dont les éléments sont deux à deux incomparables pour l'inclusion.

Théorème (lemme de Sperner). Le cardinal maximal d'une antichaîne sur $\{1, \dots, n\}$ est $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Littlewood et Offord ont déduit du lemme de Sperner le résultat suivant.

Théorème. Soient x_1, \dots, x_n des nombres réels de valeurs absolues supérieures ou égales à 1, I un intervalle semi-ouvert de \mathbb{R} de longueur 2. Le nombre de n -uplets $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\{\pm 1\}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \in I$ est majoré par $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Ce résultat déterministe se reformule en une inégalité probabiliste exprimant un phénomène d'« anti-concentration ».

Théorème. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de variables de Rademacher indépendantes, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels non nuls, I un intervalle semi-ouvert de \mathbb{R} de longueur 2. Alors

$$P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \in I\right) \leq \frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n}.$$

En particulier

$$P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = 0\right) \leq \frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n}.$$

L'ensemble des faits ci-dessus est l'objet des questions 14 à 20.

L'inégalité d'anti-concentration précédente est la clé de la suite. Elle suggère de distinguer, parmi les sous-espaces de R^n , ceux dont l'orthogonal contient au moins un vecteur ayant p coordonnées non nulles¹. On met alors en forme des idées suivantes. Si $\text{Vect}(L_1^n, \dots, L_j^n)$ est un sous-espace vérifiant la condition précédente pour une grande valeur de p , la probabilité

$$P(L_{j+1}^n \in \text{Vect}(L_1^n, \dots, L_j^n))$$

est petite grâce à l'inégalité d'anti-concentration ; il est par ailleurs peu probable que

$\text{Vect}(L_1^n, \dots, L_j^n)$ ne vérifie pas la condition précédente. Les détails de cet argument occupent les dernières questions du problème.

Le théorème de Komlòs suggère l'étude asymptotique de la suite

$$(P(M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})))_{n \geq 1}. \quad (1)$$

La démonstration proposée dans le sujet conduit à une majoration très grossière. En fait, on conjecture que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^n\right).$$

On ne peut pas améliorer le nombre 1/2 : en effet,

$$P(M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})) \geq P(L_1^n = L_2^n) \quad \text{et} \quad P(L_1^n = L_2^n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On sait depuis 1998 que la convergence de la suite (1) est géométrique. Le meilleur résultat actuel semble être une estimation de Bourgain, Vu et Wood (2010) :

¹ À vrai dire, il s'agit surtout d'une question de dualité ; la structure euclidienne ne joue aucun rôle ici.

$$P(M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{2}^n}\right).$$

Commentaires généraux

Le sujet abordait un grand nombre de notions du programme : probabilités, combinatoire, analyse asymptotique, algèbre linéaire et espaces euclidiens. Cette diversité thématique semble avoir déconcerté une bonne partie des candidats. À regarder de près les questions, peu d'entre elles étaient réellement délicates et peu vraiment simples ; beaucoup, en particulier, demandaient un certain soin dans la rédaction. L'ensemble était par ailleurs assez long.

Malgré son intérêt mathématique incontestable, le sujet s'est donc révélé un peu difficile ; il a en outre le défaut de s'appuyer exclusivement sur le programme de première année.

L'épreuve a cependant permis de mettre en évidence un nombre significatif de très bonnes copies et un lot important de copies satisfaisantes, ayant traité correctement une petite moitié des questions. En revanche, les correcteurs déplorent un contingent assez fort de copies presque vides et une quantité surprenante de copies superficielles, qui donnent à beaucoup de questions des réponses sans aucun contenu.

Conseils aux futurs candidats

Comme d'habitude, ce sujet récompensait le travail en profondeur du cours. Le caractère atypique de l'épreuve a valorisé les candidats capables de prendre de la hauteur et de rédiger avec soin et précision. Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à ne pas manipuler aveuglément les objets mathématiques. Nous leur recommandons également, face un sujet difficile, de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

D'un point de vue plus technique, on souligne les points suivants.

- Les probabilités appellent une rédaction aussi précise que les autres parties des mathématiques ; par ailleurs, même dans le cadre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est celui du sujet, elles ne se réduisent pas à la combinatoire.
- Les bases de l'analyse (majorations, estimations asymptotiques) sont au coeur d'une grande part des mathématiques ; on ne les acquiert que par une pratique assidue du calcul.
- Les notions fondamentales de l'algèbre linéaire de première année sont également indispensables dans une grande variété de domaines et doivent être maîtrisées.

Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées ; on recommande aux candidats d'employer une encre foncée, qui reste bien visible sur les copies scannées. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

Analyse détaillée des questions

Q1. Des calculs qui n'aboutissent pas toujours, avec pas mal d'erreurs. Un grand flou sur l'intervalle où est choisi k : certains candidats établissent la croissance hors de l'ensemble d'étude ! Par ailleurs, oubli fréquent de la symétrie dans la fin de la question.

Q2. Il était indispensable, pour répondre correctement, de dissocier les cas n pair et n impair, ce qui a très rarement été fait. Beaucoup de candidats maîtrisent mal la notion d'équivalent, d'où des calculs abusifs dans la première partie de la question (on remplace sans vergogne $\lfloor n/2 \rfloor$ par $n/2$) et des affirmations trop rapides dans la seconde partie.

Q3. Cette question reposait sur des inégalités très élémentaires. Beaucoup de candidats se sont perdus dans tentatives incomplètes de raisonnement par récurrence. Une fraction non négligeable a tenté

d'utiliser la question précédente, ce qui est voué à l'échec dans la mesure où Q2 ne donne qu'un renseignement asymptotique.

Q4. La première partie de la question a été en général résolue. La seconde partie n'a pas été traitée dans la grande majorité des copies ; il suffisait de voir que v et les $v - 2e_j$ sont dans $\Omega_{1,n}$, mais la notion de sous-espace engendré semble souvent mal comprise.

Q5.6.7. Ces questions ont souvent été traitées de manière combinatoire, de manière plus ou moins convaincante selon les copies. Peu de candidats ont noté que Q5 se faisait immédiatement avec les propriétés de l'espérance. La variance était donnée dans Q6, ce qui a conduit à un certain nombre de tentatives d'escroquerie. Dans Q7, certaines copies trouvent des probabilités strictement supérieures à 1 : on conseille aux candidats de prendre un peu de recul !

Q8. La rédaction de cette question est souvent approximative et ne fait pas nettement apparaître les arguments probabilistes sous-jacents : indépendance, incompatibilité, monotonie et sous-additivité de P . Par ailleurs, beaucoup de candidats calculent $P(L_1 = L_2)$ et $P(L_1 = -L_2)$ sans répondre vraiment à la question.

Q9. Dans la première partie de la question, les deux sens sont rarement traités. On note un certain flou quant à la notion de famille liée, ainsi que des erreurs de logique. Pour la deuxième partie de la question, on relève à nouveau, dans nombre de copies, une maîtrise insuffisante du formalisme des probabilités ; dans un certain nombre de copies, le lien entre la nullité du déterminant et le caractère lié de la famille des lignes n'apparaît pas.

Q10. Cette question a donné lieu à beaucoup de réponses dénuées de sens ; ce sont ici des difficultés de logique qui sont en cause (le quantificateur existentiel précède l'équivalence)

Q11. Le lien entre cette question et la question 10 a rarement été perçu ; la question a reçu très peu de bonnes réponses.

Q12. Question rarement traitée.

Q13. Cette question n'a pratiquement jamais été bien traitée ; elle est à vrai dire assez difficile à résoudre lors d'une épreuve en temps limité avec le programme de la filière PC.

Q14. Cette question a souvent été traitée. Cependant, la rédaction de la première partie est souvent filandreuse. Il suffit de dire nettement qu'une partie E d'un ensemble fini F ayant même cardinal que F ne peut être que F .

Q15. Cette petite question de dénombrement, ouverte, s'est révélée sélective. À noter qu'un certain nombre de candidats donnent la réponse correcte sans aucune explication, ce qui ne peut valoir tous les points.

Q16. Question souvent abordée, traitée dans un certain nombre de copies ; la rédaction n'est pas toujours claire et beaucoup de candidats semble confondre « incomparables » et « disjoints ».

Q17. Cette question combinatoire difficile n'a été bien traitée que dans les meilleures copies.

Q18. Q19 Ces questions simples ont permis à la plupart des candidats qui les ont abordées de récupérer quelques points.

Q21. Cette question facile nécessitait une maîtrise correcte de la logique et de la syntaxe ensembliste. Assez souvent abordée, elle a connu des fortunes très diverses.

Les questions suivantes ne concernent qu'une faible fraction des candidats.

1.2.4. Mathématiques II — PC

Le sujet de la deuxième épreuve de mathématiques PC était consacré aux propriétés classiques des fonctions harmoniques définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles ou complexes. De facture certes classique, ce problème était tout à fait dans l'esprit du programme PC, et conçu pour aborder un très grand nombre de chapitres du programme d'analyse.

La première partie était consacrée au noyau de Dirichlet et au lemme de Riemann-Lebesgue. Elle avait pour objectif de tester l'aisance des candidats dans les calculs faisant intervenir des nombres complexes (questions 1 et 2) ou des sommes géométriques (question 2), ainsi que leur capacité à contrôler des intégrales dépendant d'un paramètre tendant vers l'infini (questions 3 et 6).

- Trop de candidats semblent peu familiers avec le maniement des exponentielles complexes, et reviennent systématiquement aux fonctions sinus et cosinus, moins agréables à bien des égards !
- Le jury conseille aux candidats à venir de s'exercer à calculer rapidement et correctement toute somme géométrique de la forme $\sum_{k=m}^n z^k$, m et n étant des entiers éventuellement négatifs.
- Dans les questions 1 et 4, il était nécessaire de permuter une intégrale et une somme. Cette somme étant finie, la permutation était justifiée par simple linéarité de l'intégrale. De nombreux candidats ont perdu beaucoup de temps, faute de lucidité, à vérifier les hypothèses de théorèmes d'intégration terme à terme ici parfaitement inutiles.
- Dans la question 3, la plupart des candidats a pensé à intégrer par parties. Mais ensuite, beaucoup d'entre eux n'ont pas su justifier proprement le fait que

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} h'(u) \cos(\alpha u) du \rightarrow 0$$

quand $\alpha \rightarrow +\infty$, ce qui pouvait se faire très simplement grâce à l'inégalité triangulaire, et un peu moins simplement grâce au théorème de convergence dominée.

- Dans la question 4, la plupart des candidats a songé au changement de variable $u = t - x$, mais en oubliant trop souvent de changer les bornes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{ devenait } \int_{t-\pi}^{t+\pi}, \text{ le retour à } \int_{-\pi}^{\pi}$$

utilisant la 2π -périodicité de l'intégrande.

- Dans la question 5, il fallait prendre garde au fait que la fonction h_t devait être indépendante de n . Le résultat de la question 1 se révélait ici capital.
- Dans la question 6, comme à la question 3, trop peu de candidats ont su contrôler proprement, par inégalité triangulaire, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx$$

une fois la double intégration par parties effectuée. Par ailleurs, beaucoup de candidats ont perdu un temps précieux à refaire pour

- $n \rightarrow -\infty$ un raisonnement absolument identique à celui qu'ils venaient de faire pour $n \rightarrow +\infty$.
- Dans la question 7 enfin, il fallait penser à justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} c_n(g) e^{int}$ et $\sum_{n \geq 0} c_n(g) e^{-int}$, c'était une conséquence directe de la question précédente.

La deuxième partie était consacrée au calcul du laplacien en coordonnées polaires (question 8), utilisé ensuite pour obtenir la « propriété de la moyenne » des fonctions harmoniques sur un ouvert de \mathbb{R}^2 (question 10).

- Dans la question 8, le calcul des dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction g est en général mené à bien en utilisant la « règle de la chaîne », les choses se gâtant souvent pour les dérivées d'ordre 2, faute de notations claires et efficaces. Le jury a par exemple été surpris de voir apparaître des notations folkloriques comme :

$$\frac{\partial f}{\partial(x_0 + r \cos t)}$$

Par ailleurs, pour aboutir au résultat, il fallait utiliser l'harmonicité de f , ce point devant apparaître très clairement dans le calcul.

- La question 9 reposait sur l'identité :

$$r^2 J''(r) + rJ'(r) = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) dt \text{ pour } r \in [0, \delta[.$$

Pour l'obtenir, il fallait calculer les deux premières dérivées de la fonction J en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral. Dans ce théorème, l'hypothèse capitale est celle de domination, trop souvent purement et simplement oubliée. Parmi les candidats qui tentent de la justifier, beaucoup songent à juste titre à dominer

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t)$$

par une constante, sans prêter attention au fait que la fonction $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$, certes continue sur $[0, \delta[\times]-\pi, \pi]$ n'a pas de raison d'être bornée puisque $[0, \delta[\times]-\pi, \pi]$ n'est pas fermé et borné.

Une fois l'égalité (1) obtenue, il fallait montrer la nullité du membre de droite, ce que de nombreux candidats (pourtant physiciens) ont pensé faire en déclarant que « toute fonction périodique a une moyenne nulle ». Il est parfois utile de ne pas trop cloisonner les disciplines ! Pour répondre complètement à la question, il restait à expliquer pourquoi $rJ''(r) + J'(r)$ était nul également en $r = 0$, ce qui résultait immédiatement de la régularité C^2 de J sur $[0, \delta[$ (fermé en 0) : presque aucun candidat ne l'a fait.

- La question 10 consistait essentiellement à résoudre sur $]0, \delta[$ l'équation différentielle (du premier ordre en y') $ry''(r) + y'(r) = 0$, puis à utiliser la continuité de J' en 0. Les correcteurs ont été très surpris de voir de nombreux candidats utiliser une équation caractéristique, alors que l'équation différentielle ici considérée n'est pas à coefficients constants.

La troisième partie proposait de résoudre, sur un exemple, le problème de Dirichlet sur un carré.

- La question 11, délicate, reposait sur le fait qu'une fonction réelle continue sur un segment, positive et d'intégrale nulle est identiquement nulle. Elle a très rarement été résolue correctement.
- La question 12 en découlait presque immédiatement, le dessin d'un cercle centré en un point du carré où f atteint son maximum et tangent au côté le plus proche étant (presque) suffisant pour emporter l'adhésion. Elle a également été très rarement résolue.
- La question 13 était très accessible à condition de mener une analyse rigoureuse et attentive. À défaut, les formules parachutées se sont montrées le plus souvent fausses.

La quatrième partie proposait une démonstration du théorème de Liouville (toute fonction harmonique bornée sur \mathbb{R}^2 est constante), en utilisant un développement en série trigonométrique.

- Dans la question 14, il fallait expliciter (sans justifier à nouveau la possibilité de dériver sous le signe intégral) les deux premières dérivées de v_n , puis obtenir l'égalité

$$r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) e^{-int} dt \text{ pour } r \in [0, R].$$

- Pour conclure, il fallait effectuer dans l'intégrale du membre de droite une double intégration par parties. Les correcteurs ont ici déploré de trop nombreux « passages en force », le manque d'honnêteté intellectuelle étant inévitablement et impitoyablement sanctionné.

- La question 15 a été très rarement menée à bien, de nombreux candidats s'embourbant à nouveau dans l'utilisation d'équations caractéristiques pour des équations à coefficients non constants. Peu d'entre eux ont saisi qu'il s'agissait de changer de fonction inconnue.
- Les questions 16, et plus encore 18, ont été très rarement traitées. En revanche, beaucoup de candidats ont vu que la question 17 était une conséquence immédiate de la question 7.

La dernière partie proposait une application du théorème de Liouville à la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss. Seules les questions 19 et 20 ont été significativement abordées.

Nous terminerons ce rapport par quelques conseils aux candidats à venir.

Faire preuve de lucidité, ce qui peut signifier :

- saisir l'organisation et la logique du texte, afin d'utiliser judicieusement les résultats des questions précédentes ;
- utiliser des arguments proportionnés : pas besoin de théorème puissant pour intégrer terme à terme une somme finie !
- vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes du cours : la méthode de l'équation caractéristique ne fonctionne que lorsque les coefficients sont constants !

Viser une rédaction efficace : une à deux pages pour justifier la classe C^2 de la fonction g de la question 8, c'est bien trop !

Ne pas négliger, dans la préparation des concours, l'entraînement aux calculs.

Faire preuve d'honnêteté : il est assez difficile d'escroquer le jury, qui se montre sans pitié en présence de ce genre de tentative.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Une matrice $n \times n$ a tous ses coefficients égaux à ± 1 et l'on décide de leur signe en tirant à pile ou face de façon indépendante : le but du problème était de montrer que la matrice ainsi obtenue est inversible avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (Théorème de Komlos, 1967).

Le problème était divisé en 6 parties et 27 questions. Les quatre premières parties (20 questions) permettaient de tester les candidats sur de nombreux points du programme. Les deux dernières étaient de caractère plus technique et ont été abordées par une minorité. Disons-le tout de suite : le classement des candidats s'est fait sur les questions élémentaires des 4 premières parties, les deux dernières permettant de départager les meilleurs. Nous ne saurions trop insister sur le fait qu'il est impératif, pour bien réussir le problème, de traiter, de façon claire et précise, les questions élémentaires du début.

Partie A :

La première question est un parfait exemple : la façon la plus simple de la traiter était de constater que :

A2017 – MATH I PC



**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.**

**Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.**

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

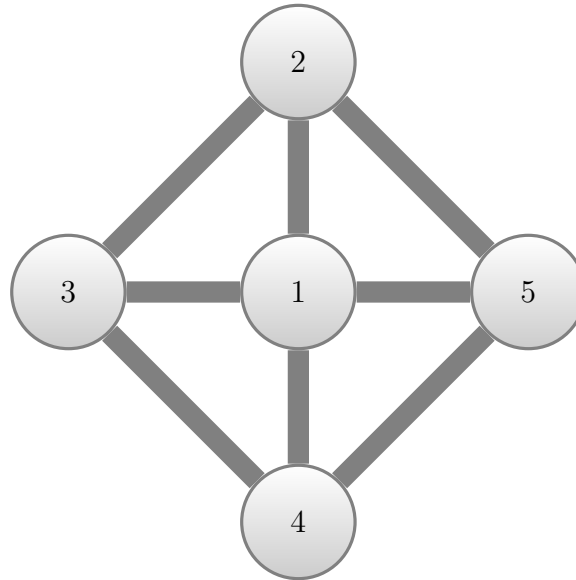
MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k + 1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i . On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k . À titre d'exemple, on aura donc

$\forall k \in \mathbf{N}$,

$$P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

Pour une matrice B , tB représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i), i = 1, \dots, 5)$.
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.
3. En observant les colonnes de la matrice B , montrer que le réel 1 est valeur propre de tB et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.
5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un \mathbf{R} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\mathbf{I}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1}),$$

où \mathbf{I}_E représente l'endomorphisme identité de E .

6. Soit $x \in \ker(u - \mathbf{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x)$.
7. Soit $x \in \text{Im}(u - \mathbf{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0_E$.
8. En déduire que $E = \ker(u - \mathbf{I}_E) \oplus \text{Im}(u - \mathbf{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E , que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à \mathbf{R}^n , telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \quad (2)$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P , telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

Définition 1 On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition 2 Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0; \quad (3)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (4)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
12. En déduire que l'ensemble \mathcal{E} des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable par le produit matriciel.
13. Montrer que cet ensemble \mathcal{E} est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
18. Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.
19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.
22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A .

On pourra utiliser le résultat de la question 8.

IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ définie en (2) ?
24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants k , $k \in \mathbf{N}$).

FIN DU PROBLÈME

A2017 – MATH II PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

PREMIÈRE RÉPÉTITION

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n , la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u e^{-u})^n du.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u e^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u e^{-u})^n du.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} u e^{-u}$ pour $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ $0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(f(x)).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ , sur $] -1, 1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur \mathbf{R} , et que la suite de fonctions $(g_n, n \geq 1)$ converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

11. En déduire que

$$\int_{-1}^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_0^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \quad (1)$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^1 (x+1)^n e^{-nx} dx \text{ et } J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx.$$

13. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n .

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n .

15. En déduire que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

V Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. *Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.*

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \dots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées (U_1, \dots, U_{n+1}) définies par

$$U_j : \Omega \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \longmapsto w_j.$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j -ième tirage. On suppose que la probabilité \mathbf{P} sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j, j = 1, \dots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

18. Pour une entrée `liste = [w1, ..., wn+1]`, écrire un pseudo-code ou un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \dots, w_{n+1})$.

Si nécessaire, on admettra l'existence d'une fonction qui permet de tester l'appartenance d'un élément w à une liste L : $(w \text{ in } L)$ renvoie « True » si $w \in L$, « False » sinon.

19. Montrer que pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.
20. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) \mathbf{P}(X > k).$$

21. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

22. Etablir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k).$$

23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN DU PROBLÈME

- Δ est compact : en tant qu'image continue de G par l'application continue (car polynomiale en les composantes de A) qui à A associe $A^T A$, c'était plutôt simple.
- Δ est contenu dans S_n^{++} : c'est une conséquence évidente de la question 2.
- K est compact : c'est une conséquence évidente de la question 4.
- K est contenu dans S_n^{++} : cela résulte de la convexité de S_n^{++} .
- K est stable par tous les éléments de H : un certain nombre de candidats ont établi cette propriété pour Δ et non pour K . Il suffisait alors de prendre une combinaison linéaire d'éléments de Δ – soit en nombre quelconque, soit de $n^2 + 1$ éléments au vu de la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ – pour conclure aisément.

Q 21. La première partie de la question résultait directement de la question 18, dont il fallait simplement vérifier que H et K satisfaisaient les hypothèses. La question 2 permettait alors de construire la matrice N , ce que la plupart des candidats qui ont traité cette question ont vu. Par contre, bien peu ont pensé à démontrer que G_1 constitue un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, ce qu'ils pouvaient soit faire directement, soit déduire du fait que l'application qui à A associe $N^{-1}AN$ est un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait tout de même prendre la peine de démontrer.

Q 22. Peu de candidats ont traité cette question avec profit. Le fait que l'application $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$ est une symétrie était facile à établir en la composant avec elle-même, malheureusement certains candidats ont pris comme définition de la symétrie la propriété caractéristique des projections. Son caractère orthogonal est la traduction en termes d'endomorphismes de la troisième partie de la question précédente. Si plusieurs candidats ont vu la conservation de $g(P)$ et de son orthogonal par $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$, bien peu ont pensé à vérifier que sa restriction à $g(P)$ est l'identité et celle à son orthogonal est l'opposé de l'identité. La conservation de l'orthogonalité de deux vecteurs pouvait alors s'obtenir en prenant la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à l'un des vecteurs. La dernière partie de la question résultait alors du fait que tout élément de K est composé de trois matrices orthogonales.

Quand ils seront devenus ingénieurs, les candidats à ce concours auront sans doute oublié une grande partie de ce qu'ils auront appris sur les bancs des classes préparatoires, et en particulier leur enseignement de mathématiques. Au moment d'en subir les épreuves, ils considèrent peut-être que c'est une étape fastidieuse, mais incontournable, un moyen de sélection parmi d'autres pour retenir les futurs étudiants des grandes écoles. Toutefois, qu'ils n'oublient pas que, dans toutes les techniques qu'ils mettront en œuvre, les mathématiques jouent généralement un rôle essentiel, et que l'utilité de celles-ci se découvre parfois de manière fortuite : qu'il suffise de penser à la théorie des ondelettes qui joue un rôle majeur dans le format d'image jpg, et à celle des groupes cycliques finis sans laquelle le cryptage RSA n'existerait pas. Et s'ils vont visiter le château du Clos-Lucé à Amboise, après être tombés en admiration devant la réalisation concrète des idées de Léonard de Vinci, qu'ils méditent cette pensée de lui affichée dans l'une des salles : « Aucune investigation humaine ne peut s'intituler véritable science si elle ne passe pas par la démonstration mathématique ».

1.2.3. Mathématiques I — PC

- Présentation du sujet

Ce sujet a pour thème la théorie des chaînes de Markov homogènes à ensemble d'états fini. Il se décompose comme suit.

- La partie I, essentiellement probabiliste est centrée sur un exemple (déplacement d'un rat dans un labyrinthe). Une matrice stochastique y fait son apparition.
 - La partie II établit un résultat classique relatif aux suites de matrices, la convergence au sens de Cesàro de la suite des puissances d'une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ dont la norme d'opérateur (relativement à une certaine norme sur \mathbf{R}^n) est majorée par 1. Elle met en jeu des arguments simples d'algèbre linéaire ou de théorie des espaces normés de dimension finie.
 - La partie III fait établir les résultats de base sur les matrices stochastiques. On montre que le résultat de la partie II s'applique aux matrices stochastiques ; dans le cas irréductible, on détermine le sous-espace propres associé à 1 et on établit qu'il existe une unique distribution de probabilités invariante. Cette partie est centrée sur l'algèbre linéaire (avec un peu de réduction).
 - La partie IV réexamine l'exemple de la partie I à la lumière de l'étude théorique précédente.
- Commentaires généraux

La description précédente montre que le sujet, dont l'objet est très classique, abordait des thématiques variées et centrales du programme. Il était de longueur raisonnable, a été presque entièrement traité dans les meilleures copies et significativement dans beaucoup d'autres. Il a permis un excellent étalonnage des notes. Malgré tout, le nombre de copies faibles demeure important. C'est ainsi que certaines questions très simples (1,2,5,6,11,12) n'ont pas été traitées correctement par de nombreux candidats. La rédaction des questions de probabilités est en progrès, mais certains candidats persistent dans des rédactions littéraires et non convaincantes ; pour donner un exemple, on attend à la question 5 une réponse plus précise que la position du rat à l'instant 1 dépend de la position durant à l'instant 0, donc S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes. Rappelons que l'on exige en probabilités une rédaction aussi nette que dans les autres branches des mathématiques.

- Conseils aux futurs candidats

Comme d'habitude, ce sujet valorisait le travail en profondeur du cours. Les nombreuses erreurs observées dans les questions probabilistes dénotent un manque de sérieux à cet égard (ignorance de la formule des probabilités totales, incompréhension de la notion d'indépendance). Beaucoup de candidats n'arrivent pas à se représenter les objets qu'ils manipulent, d'où des erreurs de typage très surprenantes (les suites vectorielles considérées dans le problème deviennent ainsi numériques dans nombre de copies). On relève par ailleurs assez fréquemment une mauvaise maîtrise du calcul matriciel, de la notion de convergence dans un espace normé, ainsi qu'une grande désinvolture dans le maniement des inégalités. Nous incitons donc les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à ne pas manipuler aveuglément les objets mathématiques. Il est également rappelé que les tentatives de bluffs préviennent très défavorablement le correcteur.

La rédaction est systématiquement évaluée. Les questions faciles ne doivent pas être expédiées : des arguments et des calculs clairs convainquent rapidement le correcteur de l'honnêteté et de la solidité mathématique du candidat. Rappelons aussi l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées. À l'inverse, une présentation soignée (Écriture lisible, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

- Analyse détaillée des questions

Q 1. La question était un peu imprécise : il aurait été plus correct de rédiger en termes de combinaisons linéaires de suite que de raisonner à k fixé. Cette imprécision n'a pas gêné les candidats. La question a été assez bien traitée ; cependant, les candidats les plus faibles ne maîtrisent pas les probabilités conditionnelles.

Q 2. Succès honorable pour cette question, même si les explications sont souvent décevantes (trop longues dans quelques copies, quasiment absentes dans beaucoup) et si on relève des confusions entre B et sa transposée.

Q 3. Cas particulier d'un résultat général établi dans la partie II : un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales est fixe par une matrice stochastique. Certains devinent (ou connaissent) le résultat, sans vraiment le démontrer. Beaucoup d'affirmations fausses (par exemple la matrice est symétrique donc 1 est valeur propre). Dans un nombre significatif de copies, des calculs très laborieux de polynôme caractéristique et/ou une résolution non moins laborieuse de système linéaire, généralement non aboutie.

Q 4. Il suffit de montrer que $BX_0 = X_0$, ce qui est vu par beaucoup de candidats. Ceux dont la matrice B est fautive n'aboutissent pas ou bluffent. Quelques tentatives maladroites (diagonalisation de B) et quelques réponses grotesques ($X_k = B^k X_0$, donc la loi est géométrique).

Q 5. Question immédiate en termes de probabilités conditionnelles, qui a appelé pas mal de réponses insuffisantes (S_1 dépend de S_0 , cf supra) ou absurdes ($S_1 = S_0$ donc S_0 et S_1 sont indépendantes).

Q 6. Début des erreurs de typage, beaucoup de candidats écrivant $u(x)^k$ pour $u^k(x)$ et sommant une suite géométrique de vecteurs ! La notation I_E n'est pas toujours comprise et on relève des confusions entre $I_E(x)$ et x .

Q 7. à nouveau des erreurs sur $u^k(x)$ (ici, la formule du binôme est parfois sollicitée). Certaines copies voient le télescopage, mais concluent directement, sans comprendre qu'il est essentiel de borner $\|Pu^k(x)\|$ (ce qui est immédiat vu qu' u est 1-lipschitzienne).

Q 8. Question discriminante, qui demandait de combiner le théorème du rang et les résultats des deux questions précédentes. Il est surprenant que la première partie de l'argument ne soit pas vue plus souvent. Beaucoup de candidats se sont enlisés dans des analyses synthèses sans résultat.

Q 9. Les candidats qui traitent Q8 réussissent en général cette question. Cependant, le projecteur n'est pas toujours correctement précisé (les deux espaces doivent être indiqués), et est parfois décrété orthogonal alors que l'énoncé ne mentionne pas de structure euclidienne.

Q 10. Une partie des candidats comprend qu'il faut appliquer le résultat de Q9 à l'endomorphisme canoniquement associé à A . En revanche, très rares sont ceux qui relient la convergence simple de la suite d'application linéaire à la convergence (au sens convergence dans un espace normé de dimension finie) de la suite de matrices.

Q 11. Question très simple, correctement comprise dans la plupart des copies, même si l'équivalence n'est pas toujours dégagée. Traiter le cas $n = 2$ ou $n = 3$ n'est pas suffisant !

Q 12. à nouveau une question simple et relativement réussie. Oubli assez fréquent (et pénalisé) de la condition de positivité.

Dans certaines copies, $AU = U$ est supposé montrer la stabilité (on prend $B = U$).

Q 13. La convexité est mieux réussie que le caractère fermé. On relève encore l'oubli de la condition de positivité, et quelques rédactions trop floues pour le caractère fermé (ensemble défini par des égalités et des inégalités larges, sans mention de la continuité).

Q 14. Question centrale, souvent abordée. La rédaction n'est pas toujours satisfaisante : l'inégalité triangulaire est souvent escamotée, le rôle de la positivité des coefficients mal expliqué. De très grosses confusions dans certaines copies faibles (les coordonnées de AX sont incorrectes).

Q 15. Cette question, souvent abordée, demandait du soin et a rarement été complètement traitée. Une réponse correcte demandait de préciser le caractère stochastique de A^p (conséquence de Q11) et d'écrire précisément les inégalités, en mettant en lumière l'importance de la stricte positivité des coefficients.

Q 16. Pas mal de réponses aberrantes et de confusions (je prends $p = 1$) ; assez rares sont les candidats qui dégagent nettement les éléments la preuve (l'inclusion triviale vient de Q11, l'autre de l'inclusion du noyau de $A - I_n$ dans celui de $A^p - I_n$ et de la question précédente).

Q 17. Question facile, qui pouvait être traitée de diverses façons, honorablement réussie et a permis des grappillages de points. Mais encore une fois, oubli assez récurrent de la positivité.

Q 18. Question de synthèse, traitée avec efficacité dans les bonnes copies, mais souvent réduite à un empilement d'affirmations sans références précises aux questions antérieures.

Q 19. Beaucoup de candidats se rappellent un exercice traité en classe (description des matrices de rang 1 comme produit colonne-ligne sans voir qu'ici U est imposée (comme image de P), ce qui nécessitait un bon recul. On relève beaucoup de fautes de logique, consistant à prétendre prouver l'égalité à partir du fait que UL vérifie des propriétés analogues à celles de P .

Q 20. Cette question demandait également un bon recul sur le sujet. Seules les très bonnes copies produisent des réponses satisfaisantes et on observe beaucoup de tentatives (infructueuses) de bluff. L'unicité est très rarement traitée.

Q 21. Cette question demandait de bien comprendre le sujet. À partir de l'égalité $LA^p = L$, la stricte positivité des coefficients de A^p fournissait le résultat. Peu de candidats l'ont vu.

Q 22. Question délicate, très rarement résolue. Confusion fréquente entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre.

QQ 23-24. Quelques rares candidats ont montré qu'ils avaient bien compris le thème du problème en répondant correctement à cette question. Certains n'ont pas réalisé que le calcul de la loi invariante avait été fait dans la partie I.

1.2.4. Mathématiques II — PC

- Remarques générales

Le problème proposé était consacré à une estimation du temps moyen de première répétition d'un processus aléatoire simple. Pour obtenir cette estimation, on commençait par établir quelques résultats asymptotiques liés aux sommes partielles de la série exponentielle.

Le sujet avait été conçu pour être abordable et raisonnablement progressif, mais le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions de base n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Le sujet était composé de 5 parties, les 4 premières aboutissant à une estimation de $T_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ et la dernière étant probabiliste.

- Remarques particulières

Première partie

- À la question 2, une petite moitié de candidats sait écrire correctement la formule de Taylor avec reste intégral.
- Dans la question 3, un trop grand nombre de candidats croit que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1$. Par ailleurs, la minoration par 0 d'une suite décroissante n'implique pas sa convergence vers 0. Dans cette même question la règle de d'Alembert – très souvent invoquée à juste titre par les candidats – est souvent présentée comme une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.
- Dans la question 4, beaucoup d'erreurs dans la dérivation de $u \mapsto ue^{-u}$.

Deuxième partie

- À la question 8, la plupart des candidats notent que la fonction f présente un maximum local en 0, mais oublient de préciser qu'0 est un point *intérieur* de l'intervalle de référence pour pouvoir conclure correctement que $f'(0) = 0$.
- La question 9 a été très rarement bien traitée. En général, une fonction continue sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ et strictement positif n'est pas minorée par un réel strictement positif.
- À la question 10 la continuité par morceaux de g_n a rarement été correctement justifiée, la définition en étant manifestement très floue dans l'esprit de la majorité des candidats. Il suffisait d'étudier les limites à gauche/droite de g_n en $\pm\sqrt{n}$ (à n fixé bien entendu). Rappelons que la régularité continue par morceaux n'est pas stable par composition. Par ailleurs, beaucoup de candidats majorent étonnamment $g_n(u)$ pour montrer la convergence demandée.
- À la question 11, un certain nombre de candidats se contente d'invoquer "la formule de l'intégrale de Gauss" pour justifier le passage à la limite sous le signe intégral, en lieu et place d'une application du théorème de convergence dominée auquel le texte conduisait naturellement.

Troisième partie

- À la question 13, de trop nombreux candidats se trompent dans le calcul de la dérivée de $x \mapsto 2^x$.
- À la question 14, il convenait de vérifier avec soin que la fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ vérifie les hypothèses de la partie II.
- À la question 15, il était insuffisant d'affirmer que $J_n \rightarrow 0$ pour en déduire que $I_n + J_n \sim I_n$, mais il fallait expliquer pourquoi $J_n = o(I_n)$.

Quatrième partie

- À la question 17, le passage de l'estimation de $R_n(1)$ à celle de $T_n(1)$ n'a pas été toujours correctement justifié.

Cinquième partie

- Dans la question 18, beaucoup de candidats introduisent de l'aléatoire dans l'algorithme avec une fonction random ou randint.

- La question 19 a été rarement bien traitée, et le jury a regretté de lire le plus souvent de longs développements confus, alors qu'il suffisait d'exhiber un événement de probabilité strictement positive inclus dans l'événement $(X = k)$.
- Dans la question 20, trop de candidats écrivent sans justification l'égalité $P(X > k+1, X > k) = P(X > k+1)$ sans en donner la raison : l'inclusion $(X > k+1) \subset (X > k)$.
- La question 22 (de cours) a été traitée moins souvent qu'attendu.

- Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. Par exemple, il est louable de montrer la convergence des intégrales rencontrées, ou de justifier la possibilité de faire tel changement de variable. Mais cela doit prendre quelques lignes, et non quelques pages...
- Soigner la rédaction : les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Consolider sa maîtrise des techniques asymptotiques : le jury a à ce sujet déploré des limites quand $n \rightarrow +\infty$ qui dépendaient de n , des développements limités sans reste, ou encore des manipulations douteuses des équivalents.
- Écrire proprement, et mettre en valeur les arguments et résultats essentiels grâce à une présentation soignée. Les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse ont été lourdement pénalisées.
- Ne pas "tricher" : les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte.

- Conclusion

Le jury s'est réjoui de lire un certain nombre de copies vraiment excellentes, qui témoignent d'une grande maturité scientifique et d'une réelle autonomie intellectuelle. Toutefois, dans la plupart des cas, les candidats ont manifesté, souvent faute d'une attention suffisante, des faiblesses qui étaient évitables, aussi bien dans les parties théoriques (convergence dominée, extrême d'une fonction continue sur un segment) que calculatoires. Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Ce sujet comportait beaucoup de questions simples et quelques questions délicates. Il est alors impératif de faire extrêmement attention à la rédaction : entre une moyenne et une bonne copie, la différence se joue parfois à ce qui peut apparaître comme des détails qui révèlent la compréhension ou entretiennent le doute (voir notamment les questions 4, 11 et 14).