Programme de colle 4

Classe de PC

Semaine du lundi 2 au vendredi 6 octobre

Liste des questions de cours
• Variations et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$ (sans suites de fonctions). • Nature des intégrales (preuve) : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ • Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{sh}\ t}\,\mathrm{d}t$. • Nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. • Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. • Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1).

L'étude classique de la convergence (exercices 17 ou 19, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 17) doit être bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction.

1 Intégration

1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition.

1.2 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, de signe constant, et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.

1.3 Calculs des primitives

1.3.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.3.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

1.4 Intégrales généralisées : sur un intervalle quelconque

1.4.1 Intégrale convergente

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité, cas de la divergence grossière.
Théorèmes de changement de variable, d'intégration par parties.

1.4.2 Le cas des fonctions positives

1.4.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

1.4.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales.

1.4.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition d'une intégrale absolument convergente et des fonctions *intégrables*. L'absolue convergence entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.