

# Programme de colle 3

Classe de PC

Semaine du lundi 25 au vendredi 29 septembre

## Liste des questions de cours

- Nature de la série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  selon  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pour  $\alpha \neq 1$ .
- Les dix DL usuels : famille exponentielle ( $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ), géométrique ( $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\ln(1-x)$ ,  $\text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  à l'ordre  $n$ ;  $\tan(x)$  à l'ordre 3.
- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
- Limite en  $0^+$  de  $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ .
- Variations et équivalent de la suite  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$  (sans suites de fonctions).
- Nature des intégrales (preuve) :  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \, dt$  où  $\beta \in \mathbb{R}$ ;  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  $\int_0^1 \ln t \, dt$

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

## 1 Fonctions d'une variable réelle

### 1.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle. Fonctions convexes.

«  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  est bornée et atteint ses bornes ».

Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

### 1.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée.

### 1.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PCSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand  $O$ , petit  $o$ , équivalents.

Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;

Les DL des fonctions hyperboliques  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$ , et de  $\text{Arcsin}$  doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

## 2 Intégration

### 2.1 Fonctions continues par morceaux

Définition.

## 2.2 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, de signe constant, et  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , alors  $f = 0$ .

## 2.3 Calculs des primitives

### 2.3.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.

Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

### 2.3.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ .
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.