Programme de colle 2

Classe de PC

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 septembre

Liste des questions de cours
• Expression de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. • Démonstration du théorème de Cesàro. • Limite de la suite $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$; équivalent de $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. • Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$. • Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}\,(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3. • Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. • Limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

2 Complexes

Révisons PCSI.

3 Combinatoire

- Soit $f : E \to F$. Si Card $E =$ Card $F < \infty$, alors f bijective $\iff$ f injective $\iff$ f surjective.
- **Formule du binôme**, $\binom{n}{k}$.
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

4 Suites et séries numériques

4.1 $\mathbb{R}$

Inégalités triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz (dans $\mathbb{R}^n$).
Définition de la convergence d'une suite, avec des ε.

4.2 Situations classiques

Suite et série géométrique : limites, expression de $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Suites croissantes majorée et décroissantes minorées. Sommes de Riemann. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, en particulier le cas f monotone ou f contractante ($\sup_I |f'| < 1$).

4.3 Relations de comparaison

Grand O, petit o, équivalents.

4.4 Séries numériques

Révisions de PCSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.
Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : $\leqslant$, grand O, petit o, équivalent.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.

5 Fonctions d'une variable réelle

5.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle. Fonctions convexes.
« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

5.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.
Théorème de la limite de la dérivée.

5.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PCSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O, petit o, équivalents.
Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;
Les DL des fonctions hyperboliques sh , ch , et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.