

# Programme de colle 16

Classe de PC

Semaine du lundi 29 janvier au vendredi 2 février

## Liste des questions de cours

- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, rappeler  $X(\Omega)$  et la loi de  $X$  lorsque  $X \sim \mathcal{B}(N, p)$ ,  $X \sim \mathcal{G}(p)$  et  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , avec  $N \in \mathbb{N}$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .
- Formule des probabilités totales.
- (Loi conditionnelle) Une grenouille pond  $X$  oeufs selon une loi de poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ . Loi du nombre  $Y$  d'oeufs éclos.
- (Loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'avoir pile). Donner la loi de la longueur  $X$  de la première chaîne, et  $Y$  de la deuxième chaîne.
- Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes :
  - Loi de  $X + Y$  lorsque  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - Loi de  $Z = \min(X, Y)$  lorsque  $X \sim \mathcal{G}(p)$  et  $Y \sim \mathcal{G}(q)$ , avec  $p, q \in ]0, 1[$ .

## 1 Probabilités

### 1.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non,  $\forall$ ,  $\exists$ ). Définition d'un ensemble dénombrable,  $\mathbb{Z}$  est dénombrable, un produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Familles sommables.

Tribus (pas d'exercices portant sur les tribus).

### 1.2 Probabilités

#### 1.2.1 Généralités

Probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Vocabulaire : **système (quasi) complet d'événements**; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance,  $P(A \cup B)$ , continuité croissante et décroissante, sous-additivité.

Lois géométrique et de Poisson sur  $\mathbb{N}$ .

#### 1.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, **formule des probabilités totales**, formule de Bayes.

Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

### 1.3 Variables aléatoires discrètes

#### 1.3.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application.

### 1.3.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes. Lemme des coalitions.

### 1.3.3 Moments : espérance, variance

Variable aléatoire discrète d'espérance finie. Théorème du transfert. Théorème de majoration. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance (sous réserve d'existence). Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.

Variance, propriétés. Variables centrées réduites.  $V(aX + b)$ .

Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

### 1.3.4 Couple : covariance

Covariance. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.

## 1.4 Lois usuelles

Lois uniforme, de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ , binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , géométrique  $\mathcal{G}(p)$  et de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

Espérance et variance dans chacun des cas.

Loi faible des grands nombres.