Programme de colle 7

Classe de PC

Semaine du lundi 13 au vendredi 17 novembre

Liste des questions de cours
• La série des $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \geqslant 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$. • Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\mathrm{Ker}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$ et $g(\mathrm{Im}\ f) \subset \mathrm{Im}\ f$. • Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\quad \mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \mathrm{Ker}\ u \iff \mathrm{Ker}\ v \cap \mathrm{Im}\ u = \{0\}$ • Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.

1 Suites et séries de fonctions

2 Séries de fonctions

2.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Liens.

2.1.1 Théorèmes avec convergence uniforme

De même : continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme, cas $\mathscr{C}^k$.

2.1.2 Théorème sans convergence uniforme

Intégration terme à terme.

3 Généralités sur les espaces vectoriels

3.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.

3.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
Théorème de la base incomplète.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i \in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

3.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
Rang d'une famille de vecteurs.
$\boxed{\textbf{Théorème du rang}}$.
Méthode : Détermination de la base d'un noyau, via la résolution d'un système.