Programme de colle 6

Classe de PC

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 octobre

Liste des questions de cours
• Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1). • La suite des $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$ converge uniformément sur $[0,1]$. La suite des $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{Arctan}\,(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. • La série des $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \geqslant 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.

1 Suites et séries de fonctions

1.1 Suites de fonctions

1.1.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. Norme infinie. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

1.1.2 Théorèmes avec convergence uniforme

Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui convergent uniformément vers f sur (tout segment de) I,

- f est continue ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ (interversion limite-intégrale).

Dérivabilité, cas des fonctions $\mathscr{C}^k$.

1.1.3 Théorème sans convergence uniforme

Théorème de convergence dominée.

2 Séries de fonctions

2.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Liens.

2.1.1 Théorèmes avec convergence uniforme

De même : continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme, cas $\mathscr{C}^k$.

2.1.2 Théorème sans convergence uniforme

Intégration terme à terme.