Programme de colle 5

Classe de PC

Semaine du lundi 9 au vendredi 13 octobre

Liste des questions de cours
• Nature des intégrales (preuve) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ • Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. • Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. • Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1). • La suite des $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$ converge uniformément sur $[0,1]$. La suite des $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{Arctan}\,(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

L'étude classique de la convergence (exercices 16 ou 18, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 16) doit être bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction, même si elle n'apparaît pas sous forme de question de cours : on étudie $|f|$ à l'aide de $\leqslant$, o ou $\sim$, on en déduit que f est intégrable, donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1 Intégration

1.1 Intégrales sur un intervalle quelconque

1.1.1 Intégrale convergente

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité, cas de la divergence grossière.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

1.1.2 Le cas des fonctions positives

1.1.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

1.1.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales.

1.1.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition de l'*intégrabilité* et des fonctions *intégrables*. L'intégrabilité entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.
Espaces vectoriels des fonctions continues par morceaux intégrables sur I, de carré intégrable sur I.

2 Suites et séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. Norme infinie. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

2.1.2 Théorèmes avec convergence uniforme

Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui convergent uniformément vers f sur (tout segment de) I,

- f est continue ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ (interversion limite-intégrale).

Dérivabilité, cas des fonctions $\mathscr{C}^k$.

2.1.3 Théorème sans convergence uniforme

Théorème de convergence dominée.