Programme de colle 4

Classe de PC

Semaine du lundi 2 au vendredi 6 octobre

Liste des questions de cours
• Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Limite en 0^+ de $x \mapsto \dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$. • Variations et équivalent de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$ (sans suites de fonctions). • Nature des intégrales (preuve) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ • Nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. • Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

L'étude classique de la convergence (exercices 16 ou 18, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 16) doit être bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction, même si elle n'apparaît pas sous forme de question de cours : on étudie $|f|$ à l'aide de $\leqslant$, o ou $\sim$, on en déduit que f est intégrable, donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Continuité

Définition ; propriétés.
« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».
Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

1.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.
Théorème de la limite de la dérivée.

1.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PCSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O, petit o, équivalents.
Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;
Les DL des fonctions hyperboliques sh, ch, et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

2 Intégration

2.1 Fonctions continues par morceaux

Définition.

2.2 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, de signe constant, et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.

2.3 Calculs des primitives

2.3.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.3.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

2.4 Intégrales généralisées : sur un intervalle quelconque

2.4.1 Intégrale convergente

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité, cas de la divergence grossière.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

2.4.2 Le cas des fonctions positives

2.4.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

2.4.4 Relations de comparaison

Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales.

2.4.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition de l'*intégrabilité* et des fonctions *intégrables*. L'intégrabilité entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.