

Programme de colle 3

Classe de PC

Semaine du lundi 25 au vendredi 29 septembre

Liste des questions de cours

- Nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.
- Les dix DL usuels : famille exponentielle (\exp , \cos , \sin), géométrique ($\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.
- Variations et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$ (sans suites de fonctions).

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 Séries numériques

Révisions de PCSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comparaison de séries à termes positifs : \leq , grand O , petit o , équivalent.

Formule de Stirling : équivalent de $n!$.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.

2 Fonctions d'une variable réelle

2.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle.

« f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

2.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée.

2.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développements limités

Révisions de PCSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand O , petit o , équivalents.

Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;

Les DL des fonctions hyperboliques sh , ch , et de Arcsin doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

3 Intégration

3.1 Fonctions continues par morceaux

Définition.

3.2 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, de signe constant, et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

3.3 Calculs des primitives

3.3.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.

Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

3.3.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.