

# Programme de colle 2

Classe de PC

Semaine du lundi 18 au vendredi 22 septembre

## Liste des questions de cours

- Expression de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .
- Démonstration du théorème de Cesàro.
- Limite de la suite  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ ; équivalent de  $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
- Nature de la série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  selon  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pour  $\alpha \neq 1$ .
- Les dix DL usuels : famille exponentielle ( $\exp, \cos, \sin$ ), géométrique ( $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \ln(1-x)$ ,  $\text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  à l'ordre  $n$ ;  $\tan(x)$  à l'ordre 3.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

## 1 Révisions de trigonométrie circulaire et hyperbolique

## 2 Complexes

Révisions PCSI.

## 3 Combinatoire

- Soit  $f : E \rightarrow F$ . Si  $\text{Card } E = \text{Card } F < \infty$ , alors  $f$  bijective  $\iff f$  injective  $\iff f$  surjective.
- **Formule du binôme**,  $\binom{n}{k}$ .
- Manipulation du symbole Sigma : sommes telescopiques et changements d'indices.

## 4 $\mathbb{R}$ et les suites réelles

### 4.1 $\mathbb{R}$

Inégalités triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz (dans  $\mathbb{R}^n$ ).

Définition de la convergence d'une suite, avec des  $\varepsilon$ .

### 4.2 Situations classiques

**Suite et série géométrique** : limites, expression de  $\sum_{k=0}^n q^k$ .

Suites croissantes majorée et décroissantes minorées. Sommes de Riemann. Suites récurrentes linéaires. Suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$ , en particulier le cas  $f$  monotone ou  $f$  contractante ( $\sup_I |f'| < 1$ ).

### 4.3 Relations de comparaison

Grand  $O$ , petit  $o$ , équivalents.

### 4.4 Séries numériques

Révisions de PCSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comparaison de séries à termes positifs :  $\ll$ , grand  $O$ , petit  $o$ , équivalent.

Formule de Stirling : équivalent de  $n!$ .

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.