

# Programme de colle 18

Classe de PC

Semaine du lundi 12 au vendredi 16 février

## Liste des questions de cours

- Énoncé et preuve du lemme d'Abel.
- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.
- Rayon et somme de  $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} z^{2n}$ .
- Rayon de  $\sum c_n z^n$ , où  $c_n$  est le nombre de chiffres de  $n$  en base 10.
- Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle (exp, cos, sin, sh, ch), géométrique ( $\frac{1}{1-x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\ln(1-x)$ ,  $\text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$

## 1 Séries numériques

Produit de Cauchy. Critère de D'Alembert.

## 2 Séries entières

### 2.1 Domaine de définition

Lemme d'Abel. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Comparaison des coefficients ( $\leq$ ,  $O$ ,  $\sim$ ).

Opérations sur les séries entières, rayon et somme.

### 2.2 Fonction somme

#### 2.2.1 Variable complexe

Continuité de la somme (admis).

Développement de  $\frac{1}{1-z}$ , exponentielle complexe.

#### 2.2.2 Variable réelle

##### 2.2.2.1 Rappels sur les séries de fonctions

Convergences simple, uniforme et normale.

Théorème de continuité, d'intégration terme à terme. Théorème de dérivation terme à terme.

##### 2.2.2.2 Séries entières

Convergence normale sur tout segment  $[a, b] \subset ]-R, R[$ .

Continuité, primitivation terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme sur  $] -R, R[$ .

Caractère  $\mathcal{C}^\infty$ . Expression des coefficients.

Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

## 2.3 Fonctions développables en séries entières

### 2.3.1 Définition et structures algébriques

Définition, stabilité par combinaison linéaire et produit.

### 2.3.2 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$e^x, \quad \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Une série entière est inséparable de son rayon de convergence.

Détermination d'un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

## 2.4 Application aux probabilités : séries génératrices

Le rayon de convergence est au moins égal à 1, et  $G_X$  est définie en 1.

Liens entre série génératrice et espérance, variance, et loi de la variable aléatoire.

Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Séries génératrices des lois usuelles.