

# Programme de colle 17

Classe de PC

Semaine du lundi 5 au vendredi 9 février

## Liste des questions de cours

- Si  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  espace vectoriel normé, alors  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset \implies F = E$ .
- $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$  est convexe dans  $\mathbb{R}^2$ . La boule ouverte  $B(0, \rho)$  est ouverte.
- Étude des limites en  $(0, 0)$  de  $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  et  $(x, y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$ .
- $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert.
- Énoncé et preuve du lemme d'Abel.
- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.
- Rayon de  $\sum c_n z^n$ , où  $c_n$  est le nombre de chiffres de  $n$  en base 10.
- Rayon et somme des séries entières usuelles : famille exponentielle ( $\exp, \cos, \sin, \text{sh}, \text{ch}$ ), géométrique ( $\frac{1}{1-x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 1 Espaces vectoriels normés

### 1.1 Construction

#### 1.1.1 Norme et distance

Norme, distance. Exemple des normes 1, 2 et  $\infty$  usuelles dans  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .  
Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

#### 1.1.2 Suites

Limite, sous-suites, suites coordonnées associées à une base en dimension finie. La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie en dimension finie.

### 1.2 Parties d'un espace vectoriel normé

#### 1.2.1 Topologie

Ouverts : définition, stabilité par union et intersection finie,  $\emptyset, E$  et les boules ouvertes sont des ouverts.  
Intérieur  $\overset{\circ}{A}$  d'une partie  $A$ , point intérieur.

Fermés : définition, stabilité par intersection et union finie,  $E, \emptyset$  et les boules fermées sont des fermés.  
Caractérisation séquentielle. Adhérence  $\bar{A}$  d'une partie  $A$ , point adhérent. Frontière.

#### 1.2.2 Autres parties

Parties bornées : définition, une suite convergente est bornée. Parties convexes : définition, les boules sont des convexes.

## 1.3 Fonctions continues

### 1.3.1 Limite

Définition, opérations algébriques, composition. Caractérisation séquentielle. Fonctions coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée  $E'$ . Continuité en un point.

### 1.3.2 Continuité sur une partie

Définition, opérations algébriques, composition, composantes.

Nature topologique des ensembles définis par  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue à l'aide d'une équation ou inéquation.

Toute fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , continue sur une partie fermée bornée, est bornée et atteint ses bornes.

Fonctions lipschitziennes, linéaires, multilinéaires, polynomiales.

## 2 Séries numériques

Produit de Cauchy. Critère de D'Alembert.

## 3 Séries entières

### 3.1 Domaine de définition

Lemme d'Abel. Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Comparaison des coefficients ( $\leq$ ,  $O$ ,  $\sim$ ).