

Programme de colle 16

Classe de PC

Semaine du lundi 29 janvier au vendredi 2 février

Liste des questions de cours
• Si F un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel normé, alors $\mathring{F} \neq \emptyset \implies F = E$. • $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$. La boule ouverte $B(0, \rho)$ est ouverte. • Étude des limites en $(0, 0)$ de $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ et $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. • $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Construction

1.1.1 Norme et distance

Norme, distance. Exemple des normes 1, 2 et ∞ usuelles dans $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

1.1.2 Suites

Limite, sous-suites, suites coordonnées associées à une base en dimension finie. La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie en dimension finie.

1.2 Parties d'un espace vectoriel normé

1.2.1 Topologie

Ouverts : définition, stabilité par union et intersection finie, $\emptyset$, E et les boules ouvertes sont des ouverts.
Intérieur $\mathring{A}$ d'une partie A , point intérieur.

Fermés : définition, stabilité par intersection et union finie, E , $\emptyset$ et les boules fermées sont des fermés.
Caractérisation séquentielle. Adhérence $\overline{A}$ d'une partie A , point adhérent. Frontière.

1.2.2 Autres parties

Parties bornées : définition, une suite convergente est bornée. Parties convexes : définition, les boules sont des convexes.

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Limite

Définition, opérations algébriques, composition. Caractérisation séquentielle. Fonctions coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée E' . Continuité en un point.

1.3.2 Continuité sur une partie

Définition, opérations algébriques, composition, composantes.

Nature topologique des ensembles définis par $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue à l'aide d'une équation ou inéquation.

Toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur une partie fermée bornée, est bornée et atteint ses bornes.

Fonctions lipschitziennes, linéaires, multilinéaires, polynomiales.