

Programme de colle 14

Classe de PC

Semaine du lundi 15 au vendredi 19 janvier

Liste des questions de cours

- (loi conditionnelle) Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, chaque oeuf éclos de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclos.
- (loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.
- Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Donner la loi de $X + Y$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
Donner la loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.

1 Probabilités

1.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non, \forall , \exists). Définition d'un ensemble dénombrable, \mathbb{Z} est dénombrable, un produit cartésien d'ensemble dénombrable est dénombrable. Tribus.

1.2 Probabilités

1.2.1 Généralités

Probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) . Vocabulaire : univers, événement, événements incompatibles, système complet d'événements; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance, $P(A \cup B)$, continuité croissante et décroissante, sous-additivité.

Lois géométrique et de Poisson sur \mathbb{N} .

1.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

1.3 Variables aléatoires discrètes

1.3.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application. Fonction de répartition.

1.3.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.

1.3.3 Moments : espérance, variance

Variable aléatoire discrète d'espérance finie. Théorème du transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance (sous réserve d'existence). Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes. Variance, propriétés.

Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

1.3.4 Couple : covariance

Covariance, coefficient de corrélation. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.

1.4 Lois usuelles

Lois uniforme, de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, géométrique $\mathcal{G}(p)$ et de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Espérance et variance dans chacun des cas.

La loi géométrique est la loi sans mémoire.

Loi faible des grands nombres.