Programme de colle 12

Classe de PC

Semaine du lundi 18 au vendredi 22 décembre

Liste des questions de cours
• Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Énoncé et preuve : un projecteur orthogonal est symétrique. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve). Énoncé (et preuve) : u est symétrique. • Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux (avec preuve). • La loi de Poisson, définie sur les $\{k\}$ et étendue à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ par $\forall A \in \mathscr{A}\ P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$, définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. • Formule des probabilités totales, avec preuve.

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

1.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation, bases directes et indirectes.
Description dans le cas de la dimension 2.

1.4 Endomorphismes symétriques

1.5 Définition

Définition et matrice (dans une base orthonormée) d'un endomorphisme symétrique.

1.5.1 Réduction

Théorème spectral : un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. Version matricielle.