Programme de colle 11

Classe de PC

Semaine du lundi 11 au vendredi 15 décembre

Liste des questions de cours
• Suites récurrentes d'ordre p : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$. Solutions lorsque A possède p valeurs propres distinctes (sans preuve). • Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire. • Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve).

1 Réduction

1.1 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.
Suites récurrentes linéaires dans $\mathbb{R}^n$. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (étude complète), d'ordre p (structure des solutions, savoir se ramener à de l'ordre 1), systèmes d'équations différentielles linéaire d'ordre 1.

2 Algèbre bilinéaire

2.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

2.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

2.3 Isométries

Définition et valeurs propres réelles possibles d'une isométrie. Groupe $\mathscr{O}(E)$. L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.
Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Interprétation comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormée, ou matrice de changement de base orthonormée. Groupes $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Orientation, bases directes et indirectes.
Description dans le cas de la dimension 2.