Programme de colle 10

Classe de PC

Semaine du lundi 4 au vendredi 8 décembre

Liste des questions de cours
• Énoncer les 3 CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable. • Énoncer la CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit trigonalisable. • Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité. • Suites récurrentes d'ordre p : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$. Solutions lorsque A possède p valeurs propres distinctes (sans preuve). • Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. • Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire.

1 Réduction

1.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

1.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.
CNS de diagonalisation (3 propositions, y compris la définition).
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

1.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.
Suites récurrentes linéaires dans $\mathbb{R}^n$. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (étude complète), d'ordre p (structure des solutions, savoir se ramener à de l'ordre 1), systèmes d'équations différentielles linéaire d'ordre 1.

2 Algèbre bilinéaire

2.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.
Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.
Théorème de Pythagore.

2.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.
Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.
Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.