Révisions : Dernière feuille

1 Probabilités

Méthode : Décrire les événements, ne pas se précipiter sur les probabilités. Commencer par donner $X(\Omega)$.

Exercice 1 (CCP, 2016 – Exo 2)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 2 (CCP 2017)
Donner la loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$, avec $p, q \in]0, 1[$.

Exercice 3
Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot.

Exercice 4 (version CCP 2017)
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n, p avec $p \in]0, 1[$.

1) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2) Déterminer la loi de Y.

2 Analyse

2.1 Séries de fonctions

Exercice 5 (CCP 2017 – Exo 2)
Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \operatorname{ch}(n)x^n$.

Exercice 6 (CCP 2017 – Exo 2)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n}$. Étudier l'existence de I_n puis la convergence de la suite (I_n).

Exercice 7 (CCP, 2017 – Exo 2)
Existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)^2}$.

Exercice 8
La série des $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$ pour $n \geqslant 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.
En déduire que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Intégration

Exercice 9 (RMS, 2017 – Exo 2)
Pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et que $(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

2) Indiquer comment trouver le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $\varphi : (a, b) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 - a - bt\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 10 (MT 2017, 2016 – extrait)
Soit $\langle ., .\rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\mathrm{d}t$.

1) Montrer l'existence de $\langle P, Q\rangle$ pour tous P, $Q \in \mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ on pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa dérivée.

2) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$ et calculer sa dérivée.
En déduire que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que h est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

4) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

5) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (à l'aide d'une majoration) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 (CCP, 2016 – Exo 1)

Soit Γ la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\Gamma(1)$.

2) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit $t > 0$, $a > 0$ et $b > a$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$.

3) **a)** Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliciter $\Gamma''(x)$ et déterminer les variations de Γ'.

b) Montrer que Γ' s'annule en exactement un point $\alpha \in \mathbb{R}$, et que $\alpha \in]1,2[$. En déduire les variations de Γ.

4) Etudier les limites de Γ en 0^+ et en $+\infty$.

5) Démontrer l'existence d'une suite (a_n), que l'on explicitera, telle que pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

3 Algèbre

Exercice 13 (CCP, 2016 – Exo 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Rang de A. (à savoir faire impérativement !)

2) Montrer que 0 est valeur propre de A, et donner la dimension du sous-espace propre associé.

3) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 14 (CCP 2016 – extraits)

Soit E un espace euclidien, muni du produit scalaire usuel. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

1) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si toute matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée est antisymétrique.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.