Révisions : Analyse

Exercice 1 (Mines-Télécom PC 2019 (RMS 130 Exo 1348))
Soient a et b strictement positifs. Trouver $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2 (Mines-Télécom PC 2019 (BEOS 5478) - exo 1)
On définit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$.
Déterminer un développement limité de f en 0 à un ordre le plus grand possible.

Exercice 3 (Lycée Fauriel, 2017 – Exo 2)
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ défini par $f(x,y)=x-y+x^3-y^3$.

1) Montrer que f admet un maximum sur $[0,1]\times[0,1]$.

2) Le déterminer.

Exercice 4 (RMS, BEOS, 2017 – Exo 2)
On pose $f(x,y)=x\ln(y)-y\ln(x)$ pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer les extremums de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 5 (OT, 2017, 2015 – Exo 2)
Donner le laplacien de $(x,y)\mapsto F(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Lycée Fauriel, RMS, 2017, 2016 – Exo 2)
Soit $F: x\in[0,1]\mapsto\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-x}\right)$. Montrer que F est définie et continue. Calculer $\displaystyle\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7 (OT, 2017, 2015 – Exo 2)
Montrer que $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(1+nx^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8 (RMS, 2017 – Exo 2)
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n}$. Étudier l'existence de I_n puis la convergence de la suite (I_n).

Exercice 9 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Soit a un réel, x dans $[0,1]$ et f_n définie pour $n\geq 1$ par $f_n(x)=n^a x^n(1-x)$.

1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) Étudier la convergence uniforme.

Exercice 10 (OT, BEOS, 2017, 2016, 2015 – Exo 2)
On pose $f: x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.
Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$, puis trouver sa limite en $+\infty$.

Exercice 11 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\mathrm{ch}\,(n)x^n$.

Exercice 12 (OT, 2017 – Exo 2)
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ converge et vaut $1-\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)$.

Exercice 13 (OT, 2017 – Exo 2)
Existence de $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 14 (CCP PC 2018 - RMS 129 Exo 1253 - exo 2)
Soit $\alpha>0$. Montrer l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $I=0$, puis calculer J.