Révisions : Analyse

Exercice 1 (Lycée Fauriel, 2017 – Exo 2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = x - y + x^3 - y^3$.

1) Montrer que f admet un maximum sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

2) Le déterminer.

Exercice 2 (RMS, BEOS, 2017 – Exo 2)
On pose $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer les extremums de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 3 (OT, 2017, 2015 – Exo 2)
Donner le laplacien de $(x, y) \mapsto F(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Lycée Fauriel, RMS, 2017, 2016 – Exo 2)
Soit $F : x \in [0, 1] \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n + x} - \frac{1}{n - x}\right)$. Montrer que F est définie et continue. Calculer $\displaystyle\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 5 (OT, 2017, 2015 – Exo 2)
Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (RMS, 2017 – Exo 2)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n}$. Étudier l'existence de I_n puis la convergence de la suite (I_n).

Exercice 7 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Soit a un réel, x dans $[0, 1]$ et f_n définie pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$.

1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2) Étudier la convergence uniforme.

Exercice 8 (OT, BEOS, 2017, 2016, 2015 – Exo 2)
On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1 + t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.
Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$, puis trouver sa limite en $+\infty$.

Exercice 9 (BEOS, 2017 – Exo 2)
Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch}\,(n) x^n$.

Exercice 10 (OT, 2017 – Exo 2)
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ converge et vaut $1 - \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$.

Exercice 11 (OT, 2017 – Exo 2)
Résoudre $y'' - y + \mathrm{e}^{-x} = 0$, puis déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

Exercice 12 (OT, 2017 – Exo 2)
Existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)^2}$.

Exercice 13 (OT, 2017 – Exo 2)
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.