Révisions : Algèbre Linéaire

Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ **2)** $x + y + z - t = 0$ **3)** $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$

Exercice 2
Montrer que les parties F suivantes sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel que l'on précisera :

1) $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. **2)** $F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n \right\}$.

Exercice 3
Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes. On commencera par montrer que f est linéaire pour les applications des questions 3 et 4.

1) $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x+z) \end{cases}$ **2)** $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$

3) $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{cases}$ **4)** $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$

Noyaux et images des applications des questions 2 et 4.

Exercice 4
Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.
2) Montrer que E est stable par produit.
3) À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a,b,c)$ est-elle inversible dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f \colon E \to E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.

Exercice 5
Soit φ défini sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(M) I_n + M$.
1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le noyau et le rang de φ. L'endomorphisme est-il bijectif ?
3) Vérifier que $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\,\mathrm{id}_E = 0$. En déduire une expression de φ^{-1}.
4) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Déterminer les sous-espaces propres associés. φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$, dont le produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$.
Soit $a \in E$ non nul, et $H = \{ x \in E \mid \langle a, x \rangle = 0 \}$.
1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
2) Soit $x \in E$. Exprimer à l'aide de a, x et $\langle ., . \rangle$ le projeté orthogonal de x sur H. En déduire la distance $d(x, H)$ entre x et H.
3) Dans $E = \mathbb{R}^3$ usuel, déterminer la distance de $x = (1,2,3)$ au plan H d'équation $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 7
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$