Révisions : Algèbre Linéaire

Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

2) $2x + 3y + z - t = 0$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = & 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = & 13 \end{array}\right.$

Exercice 2
Montrer que les parties F suivantes sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel que l'on précisera :

1) $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.

2) $F = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n \right\}$.

Exercice 3
Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes. On commencera par montrer que f est linéaire pour les applications des questions 3 et 4.

1) $f \colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x+z) \end{array}\right.$

2) $f \colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{array}\right.$

3) $f \colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}\right.$

4) $f \colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}\right.$

Noyaux et images des applications des questions 2 et 4.

Exercice 4
Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Notre objectif est d'établir que l'inverse d'une matrice inversible de E appartient encore à E, sans pour autant calculer cet inverse.

1) Montrer que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

2) Montrer que E est stable par produit.

3) À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a,b,c)$ est-elle inversible dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f \colon E \to E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.

Exercice 5
Soit φ défini sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(M) I_n + M$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer le noyau et le rang de φ. L'endomorphisme est-il bijectif ?

3) Vérifier que $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\,\mathrm{id}_E = 0$. En déduire une expression de φ^{-1}.

4) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Déterminer les sous-espaces propres associés. φ est-elle diagonalisable ?