

Programme de colle Suites et Series

Classe de MPI

Lycée Emmanuel d'Alzon

Exercice 1 (Transformation binomiale)

Soit $a = (a_n) \in E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. Sa transformée binomiale est la suite $b = (b_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k$$

On définit donc une fonction $T : E \rightarrow E$ où $T(a) = b$.

- 1) Soit $a \in E$, et $b = T(a)$. Calculer $T(b)$.
- 2) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$
- 3) Notons $\Delta : E \rightarrow E$ définit par, pour $u \in E$, $\Delta(u) = v$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

Δ est appelé l'opérateur de différence. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(u)_n = (-1)^n (\Delta^n(u))_0$.

- 4) (après les séries entières) Soit $a \in E$ et $b = T(a)$. Sous réserve d'existence de $R > 0$, posons, pour tout $x \in]-R_A, R_A[$,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Et de même pour b , $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour $x \in]r, r[$,

$$B(x) = e^x A(-x)$$

Exercice 2

Déterminer une série (u_n) telle que : $\sum u_n$ diverge, la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$ est bornée, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Indication : Se souvenir de la preuve qu'une série qui converge sans converger absolument peut tendre vers un $\ell \in \mathbb{R}$ arbitraire en permutant les termes : prendre une série divergente simple, et ajouter des -1 de façon judicieuse, avec une formule de récurrence très algorithmique.

Exercice 3

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{-u_n}$.

- 1) Nature de (u_n) .
- 2) Nature de $\sum u_n$
- 3) Nature de $\sum (-1)^n u_n$

Indication : 1. Regarder les premiers termes. Identifier ce qui est exploitable. 2. Si $u_n = o(1)$, on peut faire un DL, et donc trouver un équivalent. 3. Itérer l'idée du 2.

Exercice 4

Soit $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$. Nature de $\sum u_n$. Indication : Étudier (U_{2n}) .