

Programme de colle Suites et séries de fonctions

Classe de MPI

Lycée Emmanuel d'Alzon

Exercice 1

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n: \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto nt(1-t)^n \end{cases}$$

- 1) Convergence simple, convergence uniforme de (f_n) .
- 2) Convergence uniforme sur tout segment de $]0, 1]$ de (f_n) .

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \end{cases}$$

- 1) Donner un DL à l'ordre 1 de f en x .
- 2) Déterminer la limite pour la convergence simple de (f_n) .
- 3) Rappeler la définition (avec des ε) de la continuité de f , de l'uniforme continuité.
- 4) Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Solution.

- 1) Sous forme $f(x+h) =$, si possible. Sous la forme d'un polynôme en $(x-a)$, pour la question suivante, prendre le temps d'identifier x et a .
- 2) Lever une forme indéterminée dans une limite : , DL (o), $\leq$.
- 3) .
- 4) Deux façon de voir

$$n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x) \right]$$

Soit comme un DL dont on veut maîtriser le petit o précisément : changer de Taylor, passer au reste intégrale (intégrale et inégalités : bien!).

Soit exprimer $f(b) - f(a)$ à l'aide de f' : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

Puis revenir à la définition de la limite avec des ε . Sur un segment, la continuité entraîne l'uniforme continuité : on obtient un $\eta > 0$ qui convient pour tous les $x \in [a, b]$.

□

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

- 1) Soit $n \geq 1$. Montrer que I_n converge.
- 2) Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

3) Montrer que $\sum (-1)^n I_n$ converge.

Solution.

- 1) Typage des objets : on vous demande la convergence de l'intégrale.
- 2) $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^2)$ sur $[0, +\infty[$.
- 3) CSSA.

□

Exercice 4

On étudie l'équation fonctionnelle

$$f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2 \quad (1)$$

- 1) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
- 2) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur h la fonction f est-elle solution de (1) ?
- 3) On définit par récurrence une suite de fonctions (h_n) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

a) Pour $x \in [0, 1]$, posons $T_x : y \mapsto y - xy^2/2$ sur $[0, 1]$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0, 1]$ et que $T_x([0, 1]) \subset [0, 1]$.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{x}{2^{n+1}}$$

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = h_{n+1} - h_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, puis que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

4) Montrer que l'équation (1). admet une solution continue et non constante sur $[0, 1]$.

5) Montrer que l'équation (1) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

- 1) Si $f = c \in \mathbb{R}$, $c = 2c - 2c^2$ d'où les valeurs de c .
- 2) On trouve la condition nécessaire et suffisante « $\forall x \neq 0, \quad h(2x) = h(x) - xh(x)^2$ ».
- 3) a) Soit $x \in [0, 1]$ fixé. T_x est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et après avoir prouvé que $\sup_{y \in [0, 1]} |T'_x(y)| = 1$, on applique

l'inégalité des accroissements finis.

$T_x([0, 1]) \subset [0, 1]$ par un tableau de variations.

b) Soit $x \in [0, 1]$. Comme $h_0(x) = 1 \in [0, 1]$ et $h_{n+1}(x) = T_{x/2}(h_n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient par récurrence que $h_n(x) \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis en $h_{n+1}(x) \in [0, 1]$ et $h_n(x) \in [0, 1]$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq |h_n(x/2) - h_{n-1}(x/2)|$$

Puis, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{x}{2^{n+1}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ci-dessus,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |v_n(x)| \leq \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

D'où $\|v_n\|_\infty \leq 1/2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $\sum v_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a la somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = h_n - h_0$$

Donc, en notant $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ la somme partielle, $h_n = S_n + h_0$.

Or (S_n) converge uniformément sur $[0, 1]$, donc (h_n) aussi.

4) Notons h la limite de (h_n) pour la convergence uniforme (donc pour la convergence simple aussi).

Par récurrence, h_n est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme composée d'applications continues. Or (h_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ d'après ci-dessus.

Donc, par théorème de continuité des suites de fonctions, h est continue.

De plus, par récurrence, $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $h(0) = 1$ et la fonction h est non nulle.

En posant $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, f est solution de (1) d'après 2.

De plus, f est continue comme produit de fonctions continues, et non constante car $h \neq 0$.

5) Par étapes, sur des intervalles $[0, 2^k]$ avec $k \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 5

Exercice 6