

Exercice 1

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de la borne inférieure ?

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 4 (Petites mines)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une solution.
- 2) Montrer que $\forall n \geq 2, f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une solution.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x^3 \cos\left(\frac{1}{x^4}\right)$ pour $x \neq 0$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f , puis la continuité de f' .

Exercice 6

Domaine de définition et dérivée des fonctions suivantes :

- 1) $f(t) = \text{Arctan}(\sqrt{1+t^2} - t)$
- 2) $f(t) = \text{Arccos}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ puis montrer que $f(t) = 2 \text{Arctan } \sqrt{t}$.

Exercice 7 (Convexité)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geq 0$. Montrer que f est sous-additive c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Exercice 8 (Convexité)

Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Exercice 9 (Convexité)

Sans calculs, montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 10

Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire de classe $\mathcal{C}^n$.

Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ a la parité de k .

Exercice 11 (Construction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

- 1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f' sur $\mathbb{R}^*$, en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) On se place sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n -ième de f , est de la forme $P_n(1/x) \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$, où P_n est un polynôme. (sans hypothèse sur $\deg P_n$).
- 3) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) Des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support dans un segment.
 - a) Soit $[a, b]$ un segment. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que g est nulle hors de $]a, b[$, $g > 0$ sur $]a, b[$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver g vérifiant les hypothèses précédentes et de plus $g = 1$ sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Indication : *Penser aux primitives.*

5) Le but de cette question est de trouver des fonctions qui admettent un DL mais ne sont pas $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = o(x^n)$ en $x = 0^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Construire une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ qui admet un DL en 0 à l'ordre n pour tout n et qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Indication : *On pourra s'inspirer de la fonction de l'exercice 5.*

Exercice 12 (Développements limités)

Donner le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

- | | | | |
|---------------------------|---|--------------------------------|---|
| 1) $\frac{x}{e^x - 1}$ | 2) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ | 3) $\text{Arctan } \sqrt{1+x}$ | 4) $\text{Arccos}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ |
| 5) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ | 6) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ | 7) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ | 8) $e^{\cos(\ln(\cos x))}$ |

Donner le DL à l'ordre indiqué et au point indiqué des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 9) $\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ ordre 3 en $\frac{\pi}{2}$ | 10) $(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3}$ ordre 4 en $+\infty$ |
|--|--|

Exercice 13 (Limites)

Donner la limite en 0^+ des expressions suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ | 2) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ |
|--------------------------------------|-------------------------------|

Donner la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 3) $\left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ | 4) $\left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}$ |
|---|--|

Exercice 14

Montrer que les fonctions suivantes sont inversibles au voisinage de 0, puis déterminer le DL de celles-ci à l'ordre 3 en $f_i(0)$.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $f_1(x) = x + \text{sh } x$ | 2) $f_2(x) = x + e^{\text{Arctan } x} - \cos x$ |
|--------------------------------|---|

Exercice 15

Donner le DL à l'ordre 3 en 0 des solutions (au voisinage de 0) des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $y' = e^x y + x \cos x$ et $y(0) = 1$ | 2) $(1+x^2)y' + y = \text{Arctan } x$ et $y(0) = 1$ |
|--|---|