

Exercice 1

- 1) Simplifier la somme suivante : $S_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$, pour $n \geq 2$.
- 2) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall k > 0$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Simplifier la somme suivante : $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3 - k + 2}{k^2 - 1}$, pour $n \geq 2$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $S_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$
- 2) $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$
- 3) $S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$
- 4) $S_n^{(4)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$
- 5) $S_n^{(5)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx)$
- 6) $S_n^{(6)} = \sum_{k=0}^n k^2 \cos(kx)$
- 7) $S_n^{(7)} = \sum_{k=0}^n \cos^3(kx)$

Exercice 3

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 4

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, pour tout réel t , $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt)$ sous forme d'une somme.
- 2) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

- 3) Soit $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin k}{k}$. Montrer que $U_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.
- 4) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1, \dots, n\}$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $S_1 = \sum_{(i,j) \in I^2} ij$
- 2) $S_2 = \sum_{(i,j) \in I^2} i + j$
- 3) $S_3 = \sum_{(i,j) \in I^2} \inf(i, j)$
- 4) $S_4 = \sum_{(i,j) \in I^2} |i - j|$

Exercice 6

À l'aide de la formule du binôme pour $(1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- 2) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
- 3) $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$
- 4) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
- 5) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k}$
- 6) $\sum_{k=0}^{2k \leq n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{2k}$

Exercice 7

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.