

Exercice 1 (Convergences uniforme de suites : pratique)

- 1) • Convergence simple Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

$$f_n(1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Si $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ (géométrique).

Donc (f_n) converge simplement vers $f = 0$ sur $[0, 1]$.

- Convergence uniforme Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. f_n polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

D'où

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	0

Or $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$.

$$= \frac{1}{n+1} e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n+1} e^{-1+o(1)} \quad \text{Car } \ln(1+u) = u + o(u)$$

$$\sim \frac{e^{-1}}{n}$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \sim e^{-1}/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Conclusion :

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $f = 0$ sur $[0, 1]$.