

Exercice 1 (Convergences uniforme de suites : pratique)

- 1) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = [0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n(1 - x)$$

- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)$$

On essaiera d'éviter tout calcul de norme infinie.

- 3) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I =]0, 1]$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right)$$

- 4) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{n + 1}$$

On étudiera aussi la convergence uniforme sur $[-a, a]$ pour $a > 0$ assez grand (à déterminer).

- 5) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Étudier la convergence sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

- 6) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = nxe^{-nx} \sin(x)$$

On se souviendra que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

- 1) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2) .

- 2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f , bornée sur I . Montrer que (f_n^2) converge uniformément vers f^2 .

Indication : Montrer que $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$.

Exercice 3

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f . Montrer que f est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions qui convergent uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- 1) Rappeler l'inégalité des accroissements finis dans le cas de $\varphi(u) = \ln(1 + u)$ entre deux réels positifs.
- 2) Montrer que $(\ln(1 + f_n))_n$ converge uniformément vers $\ln(1 + f)$.

Exercice 5

Soit (f_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale bornée, alors f est constante.
- 2) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f_n - f_N$ est bornée.
- 3) En déduire que f est polynomiale.

Exercice 6 (Suites classique)

Définissons (P_n) par

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

et $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = P_n(x)$.

- 1) Montrer la convergence simple de (f_n) vers $\begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.
- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $|\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$.
- 3) En déduire que (f_n) converge uniformément.

Exercice 7 (Suites et intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$.

- 1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge.
- 3) Montrer que la suite (I_n) ne converge pas vers 0.

Exercice 8 (Suites et dérivées)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.

- 1) Étudiez la convergence uniforme de (f_n) .
- 2) Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables ?
- 3) A-t-on convergence de la suite des (f'_n) ? Soit $a > 0$. Que se passe-t-il sur un segment de la forme $[-a, a]$?

Exercice 9

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $c \in [a, b]$. Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et $P_n(c) = f(c)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $a < b$ deux nombres réels.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Démontrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$.

Exercice 11

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{1) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx & \text{2) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx \\ \text{3) } v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx & \text{4) } w_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx \end{array}$$

Exercice 12 (Convergences de séries : pratique)

Domaine de définition et domaine de convergence normale des séries de fonctions $\sum f_n$, pour les f_n suivantes. On précisera l'intervalle sur lequel la fonction somme est continue.

- 1) $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, avec $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
- 3) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$. On comparera $S(x)$ et $S(1/x)$. Limite en $+\infty$ de la somme.

Exercice 13

Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on définit $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$.

Pour $n \geq 1$, on définit $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$.

- 1) Nature et valeur de $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.
- 2) Domaine de définition de la série de fonctions $\sum f_n$. On note $S(x)$ sa somme.
- 3) Continuité de S (on précisera l'intervalle).
- 4) À l'aide d'un encadrement, montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 14

Soit $u_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition I de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
- 2) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimez S' sans symbole de sommation.
- 3) Montrer que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 4) Déduire S de l'expression de S' et d'un calcul judicieusement choisi.

Exercice 15

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- 1) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. (fait en cours)
- 2) Préciser le sens de variation de S .
- 3) Établir

$$\forall x > 0, \quad S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- 4) Donner un équivalent de S en 0.

- 5) Donner un équivalent de S en $+\infty$. Indication : S s'inspire de l'exercice $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$.

Exercice 16 (Fonction vérifiant une équation arbitraire)

On définit (u_n) suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

- 1) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq t - t^2 \leq t \leq 1$. Indication : Faire au besoin un tableau de variations de $h(t) = t - t^2$.
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 3) Étudier la convergence simple de la série $\sum v_n$, où $v_n = u_{n+1} - u_n$, sur $[0, 1]$. En déduire la convergence de la suite $(u_n(x))$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- 4) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 17 (CCINP PSI 2020)

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.

- 1) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.
- 2) Soit $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

Indication : Penser à la quantité conjuguée.

Exercice 18

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{1}{n^2}$$

- 2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 19

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Soit $I = \int_0^1 x^x dx$.

- 1) Montrer que I converge.
- 2) À l'aide de l'égalité (que l'on montrera lors du cours sur les séries entières) $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, montrer que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \ln x)^n dx$$

- 3) Soit $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x dx$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec $p > 0$ si $q > 0$.

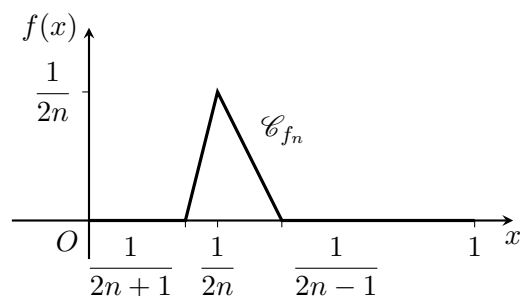
Obtenir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$. En déduire $I_{n,n}$.

- 4) Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

- 5) Sur le même modèle, déterminer une expression de $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx$ sous forme d'une série numérique.

Exercice 20 (Convergence absolue uniforme)

Pour $n \geq 2$ on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 0$ sauf sur $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}\right]$ où son graphe forme un triangle de hauteur $\frac{1}{2n}$ en $x = \frac{1}{2n}$.



- 1) Montrer que la série de terme général f_n ne converge pas normalement.
- 2) Montrer que cette série converge uniformément absolument, c'est-à-dire que $\sum |f_n|$ converge uniformément, sur $[0, 1]$.

Exercice 21 (Résidus)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \neq |z_0|$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z_0 - re^{i\theta}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < |z_0| \\ \frac{2\pi}{z_0} & \text{si } r > |z_0| \end{cases}$$

Faites un dessin, en plaçant dans le plan complexe z_0 et $\{re^{i\theta} | \theta \in [0, 2\pi]\}$. Vous constaterez que, dans un cas, z_0 est à l'extérieur du disque, et dans le second cas, z_0 est à l'intérieur. Le point z_0 est le pôle de la fraction rationnelle $\frac{1}{z_0 - X}$, et le résultat qui précède est une première approche du théorème des résidus.

Banque CCINP 2027 : Suites et séries de fonctions

Ces exercices sont extraits de la banque d'exercices d'oraux CCINP. Vous pouvez consulter les corrigés, après avoir cherché les exercices, évidemment.

Exercice 8

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

- 1) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
- 2) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 9

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
- 2) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
- 3) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
- 4) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 10

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

- 1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Exercice 11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 14

Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

- 1) Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.
- 2) On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - a) En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 - b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 3) Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice 17

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

Exercice 25 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 26

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1) Justifier que I_n est bien définie.

2) a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente?

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

2) Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

3) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 48

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

1) Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.

2) Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .

a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .

b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.

c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.

3) En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

Exercice 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1) a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- 2) a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.
- En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.
- b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.

- 1) a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
- b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?
- c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
- 2) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.