

Exercice 1 (cours)

Il faut connaître parfaitement la nature des séries de terme général u_n suivants :

- 1) $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ 2) $u_n = q^n$ selon les valeurs de $q \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries de terme général u_n suivants.

- 1) $u_n = \frac{2^n + 11}{3^n + 5}$, 2) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, 3) $u_n = n^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, 4) $u_n = (-1)^n n^3$,
 5) $u_n = (-1)^n e^{-\sqrt{n}}$, 6) $u_n = \frac{(n+1)^4}{n! + 1}$, 7) $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 1$,
 8) $u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)}{(\ln(n^2 + n))^2} e^{\frac{1}{n}}$ 9) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, 10) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ avec $\alpha > 0$,
 11) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ (CCINP).

Exercice 3 (autour de Cesàro)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Montrer que $\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$ converge vers 0.

Exercice 4 (autour de Cesàro)

- 1) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
 2) En déduire les limites des suites suivantes :

a) $v_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

b) $w_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 5 (autour de Cesàro)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- 1) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
 2) Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$, en déduire un équivalent de u_n .

Exercice 6 (autour de Cesàro – Mines-Ponts)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

- 1) Montrer que (u_n) est strictement positive, qu'elle converge, et déterminer sa limite.
 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$. Déterminer un équivalent de (v_n) (on supposera $\alpha \neq 0$).
 3) Déterminer α tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ soit un réel non nul. En déduire un équivalent de (u_n) .

Exercice 7 (Comparaison série/intégrale)

Soit f , une fonction positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt$$

- 1) Montrer que la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 2) Application : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma \approx 0,57721566$.

Exercice 8 (Restes et sommes partielles)

On cherche à obtenir des équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas particulier des séries de Riemann.

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

La preuve s'adapte au cas plus général d'une fonction $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 9 1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente et $u_n \geq 0$, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.

- 2) Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs? Indication : *On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.*
- 3) On suppose que $u_n > -1$ et que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.

Exercice 10

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.