

Exercice 1

Calculer le rang, le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ et, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{K})$.

Déterminer le rang de la matrice diagonale blocs de blocs diagonaux $A_1, \dots, A_n$.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau, le rang et l'image de f . Construire $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base du noyau, complétée en une base de l'image puis en une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice M' de f dans cette base, et la matrice de passage.

Exercice 4

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques ($M^T = -M$) de taille n .

- 1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On précisera leur dimension.
- 2) Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixés. Soit f définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $f(M) = -M + \text{Tr}(M)A$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme.
- 2) On suppose que $\text{Tr}(A) \neq 1$, montrer que f est bijective.
- 3) On suppose désormais que $\text{Tr}(A) = 1$, déterminer $\text{Ker } f$. Montrer que $\text{Im } f = \{M \mid \text{Tr } M = 0\}$.
- 4) Résoudre $f(X) = B$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et u_A défini par $u_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que u_A est un endomorphisme. Noyau et image de u_A .
- 2) Déterminer la matrice de u_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 3) Écrire la matrice de $u_A : M \mapsto AM$ lorsque A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4) Dans le cas où $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est quelconque, montrer que la matrice de u_A dans la base précédente (en dimension n^2) est diagonale blocs.

Exercice 7

Soit $M = (\binom{j}{i})_{0 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. (On pose $\binom{j}{i} = 0$ si $j < i$).

À l'aide d'une application linéaire bien choisie, calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8

Soit $n \geq 2$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- 1) Déterminer J^2 . En déduire $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tels que $aJ^2 + bJ + cI_n = 0$.
On notera $P = aX^2 + bX + c$ et l'expression ci-dessus se note $P(J)$.
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une division euclidienne judicieuse, Déterminer J^k sans faire de récurrence.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice n (c'est-à-dire $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourra s'aider d'une question de cours.

Exercice 10 (difficile)

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i , $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i , $\sum_j |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathbb{C}^n$ est fixé, admet une solution unique.
- 3) Soit P une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant $\forall i \sum_j p_{i,j} = 1$. Montrer que $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\} = 1$ et que ce sup est atteint. Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.