

1 Déterminants

Exercice 1

Calculer les déterminants des matrices suivantes, sous la forme la plus factorisée possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad xI_3 - A \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad xI_3 - B \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = (ij)_{1 \leq i,j \leq n} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (c'est-à-dire $M^T = -M$). Montrer que n impair entraîne M non inversible.

Exercice 3 (cours)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Le but de cet exercice est de montrer par récurrence que

$$\det V_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad \text{où} \quad V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

1) Soit $n \geq 0$. Effectuer l'opération suivante sur $\det V_{n+1}$:

$$C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k C_k \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

2) Exprimer la dernière colonne à l'aide d'un polynôme P .

3) Montrer que l'on peut choisir des coefficients $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$, sans expliciter les coefficients. En déduire $\det V_{n+1}$ en fonction de $\det V_n$.

4) Démontrer le résultat voulu par récurrence.

Exercice 4

Soit A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A + C - B \end{pmatrix} = \det(A + C) \det(A - B)$$

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et a, b, c, d .

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{K}) \iff (A + I \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } A - I_n \in GL_n(\mathbb{K}))$$

Exercice 7

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que P est inversible.
- 2) Calculer AP , en déduire $\det(AP)$ puis $\det(A)$.

Exercice 8

On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.

2 Autres matrices blocs**Exercice 9**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. À l'aide d'un calcul matriciel blocs judicieux, montrer que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \iff \sum_{i=1}^n x_i C_i$$

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces stables par l'endomorphisme f . Montrer que $F_1 + \dots + F_n$ est stable aussi par f .

3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices**Exercice 11**

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer $P(D)$.

Exercice 12

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)^2$, et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B semblables entraîne $P(A)$ et $P(B)$ semblables.

Exercice 13

Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 , l'exprimer en fonction de A et I_3 .
- 2) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse sans plus de calculs.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but des questions suivantes est de calculer A^n .
 - a) Effectuer la division euclidienne de X^n par $P = X^2 - 3X + 2$. On notera R le reste.
 - b) Déterminer les coefficients de R . On pourra songer à utiliser judicieusement les racines de P .
 - c) En déduire A^n .

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tels que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre¹. Posons

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow E \\ v \mapsto v(x) \end{cases}$$

1. Par exemple si $u^n(x) = 0$ et $u^{n-1}(x) \neq 0$, mais pas nécessairement.

- 1) Montrer que $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.
- 2) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
- 3) Montrer que φ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}(u)$ dans E .
- 4) En déduire que $\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1}) = \mathbb{K}[u]$. Avec $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u . Pour tout endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable F , on note $\tilde{v}_F : F \rightarrow F$ sa restriction à F .

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\widetilde{P(u)}_F = P(\tilde{u}_F)$.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$. Montrer que

$$x \in \text{Ker } P(u) \implies \forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(u)(x) \in \text{Ker } P(u)$$

Exercice 17

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $D = \text{PGCD}(A, B)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker } (A(u)) \cap \text{Ker } (B(u)) = \text{Ker } (D(u))$.

Exercice 18

En considérant $f : (u_n)_{n \geq 0} \mapsto (u_{n+1})_{n \geq 0}$, et en appliquant le lemme des noyaux, déterminer les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

Exercice 19

En considérant $D : y \mapsto y'$, et en appliquant le lemme des noyaux, déterminer les fonctions $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vérifiant

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 0.$$