

Exercice 1

Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des fonctions f , définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante : il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq Ct^n$$

Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt$$

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
(Indication : Décomposer $\cos(x-t)$ pour se ramener à une intégrale sans paramètre).
- 2) L'endomorphisme u est-il surjectif?
- 3) Montrer que u est injective (Indication : dériver $u(f)$).

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E .
- 2) Soit $(a_0, \dots, a_n) \in E^{n+1}$ des fonctions fixées. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme

$$\forall y \in E \quad \varphi(y) = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

- 3) En déduire que les solutions d'une équation différentielle linéaire $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ forment un sous-espace vectoriel.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que u défini par $u(P) = P'$ est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau et son image. Mêmes questions avec $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(f) = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - f)$. Montrer que

$$\text{a) } g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f \qquad \text{b) } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f) \qquad \text{c) } g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$$

Montrer aussi que $f(\text{Ker } g) \subset \text{Ker } g$, $f(E_\lambda(g)) \subset E_\lambda(g)$ et $f(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$.

Remarque : Si F est un sous-espace vectoriel de E , on dit que F **est stable par** f lorsque $f(F) \subset F$. Nous venons de montrer la propriété classique suivante :

Si f et g commutent, alors les noyau, sous-espaces propres (E_λ) et image de l'un sont stables par l'autre.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(v \circ u)$ puis que $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u \iff \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$
- 2) Montrer que $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ puis que $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v \iff \text{Ker } v + \text{Im } u = E$
- 3) On suppose E de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\text{a) } \text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \qquad \text{b) } E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u \qquad \text{c) } \text{Im } u = \text{Im } u^2$$

On pourra procéder par double implications et doubles inclusions.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent c'est-à-dire tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\text{id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

Exercice 9

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

- 1) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

- 2) Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 et K l'ensemble des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{P}_0$ et K sont des sous-espaces vectoriels et que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = K \oplus \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{I}$

Exercice 10

Montrer que $E_1 = \{(a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $F_k = \text{Vect}(X^k P)$.

Montrer que les F_k sont en somme directe dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12

Montrer que les familles suivantes sont libres :

- 1) $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^4$.
 2) $(A^k)_{0 \leq k \leq 2}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 3) $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ où $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = e^{ax}$.
 4) $(x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$
 5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $n \geq 2$ / $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ libre.

Exercice 13

Résoudre les systèmes suivants :

- 1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$
 2) $2x + 3y + z - t = 0$
 3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$
 4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

Exercice 14 (D'après Centrale-Supélec PC)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

- 1) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\text{Ker } f = \text{Im } f$.
 a) Montrer que n est pair et déterminer le rang de f en fonction de n .
 b) Montrer que $f \circ f = 0$.
 2) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $n = 2 \text{rg } f$.
 a) Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. En déduire que $\text{Ker } f = \text{Im } f$.
 b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit p et q deux projecteurs de E .

- 1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq + qp = 0$, puis si et seulement si $pq = qp = 0$.
 2) Désormais $p + q$ est un projecteur. Déterminer $\text{Ker}(p + q)$ et $\text{Im}(p + q)$ en fonction des noyaux et images de p et q .

Exercice 16 (centre de $\mathcal{L}(E)$)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de déterminer le *centre* de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire les endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes :

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall g \in \mathcal{L}(E) \ f \circ g = g \circ f\}$$

Soit $f \in Z(\mathcal{L}(E))$ fixé.

- 1) Soit $x \in E$ non nul fixé. Montrer qu'il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Indication : utiliser un projecteur p_x sur $\text{Vect}(x)$.
- 2) Soit x et $y \in E$, non nuls et colinéaires. Avec les notations de la question précédente, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
- 3) Même question avec x et y non colinéaires. Indication : écrire une expression combinant x et y .
- 4) En déduire qu'il existe un scalaire λ tel que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$.
- 5) Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E ?

Exercice 17 (Dual)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer qu'il existe F , sous-espace vectoriel de dimension 1 de E , tel que $E = F \oplus \text{Ker } \varphi$. ($\text{Ker } \varphi$ est donc un hyperplan).
- 2) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

Exercice 18

Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et H un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E .

- 1) Montrer que l'application $\tilde{f} : H \rightarrow f(E)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est un isomorphisme (Indication : on pourra commencer par montrer la linéarité, puis l'injectivité, et la surjectivité).
- 2) On suppose désormais E et E' de dimensions finies respectives p et n . Trouver des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et E' pour que la matrice de f dans ces bases soit la plus simple possible.
- 3) (Chapitre suivant) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r . Indication : Utiliser les questions 1 et 2.
 - a) Montrer que $M = P J_r Q$ avec P et Q des matrices inversibles et $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.
 - b) Montrer que $M = P' I_r Q'$ avec $P' \in \mathcal{M}_{n,r}$ et $Q' \in \mathcal{M}_{r,n}$ deux matrices de rang maximal possible (que l'on précisera).

Exercice 19 (factorisation)

Soient E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F, G) \quad v = w \circ u$$

- 1) On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$.
- 2) On suppose $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

On s'appuie sur les résultats de l'exercice 18 : On note H un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , et $\tilde{u} : H \rightarrow \text{Im } u$ l'isomorphisme obtenu en restreignant u . Notons $p_H \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur H parallèlement à $\text{Ker } u$ et $p_{\text{Im } u} \in \mathcal{L}(F)$ une projection sur $\text{Im } u$.

Construire w qui vérifie $v = w \circ u$.