

Exercice 1

Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]^\times = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, (a, b) \neq (0, 0)\}$ est un groupe pour le produit.

Exercice 2

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, et $g \in G$ fixé. Montrer que $f : x \mapsto gxg^{-1}$ est un isomorphisme de G dans G .

Exercice 3

Soit $(G, \star)$ un groupe (noté multiplicativement) et $x \in G$ d'ordre d . Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 4

Soient G et H deux groupes.

- 1) Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H , alors (g, h) est d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$ dans $G \times H$.
- 2) On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres (cardinaux) de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 5

Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

- 1) Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.
- 2) En déduire que G est fini.

Exercice 6

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 7

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Soit $g \in G$. Montrer que $f_g : x \mapsto gx$ est bijective.

Exercice 8

Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$. Indication : Ex. 7.

Exercice 9 (Théorème de Lagrange)

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G .

- 1) Dédurre de l'exercice 7 que, pour tout $g \in G$, H et $gH = \{gh; h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
- 2) Soient $g_1, g_2 \in G$. Démontrer que $g_1H = g_2H$ ou $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.
- 3) En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G .

Exercice 10

Soit H un sous-groupe strict d'un groupe $(G, \cdot)$. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H .

Exercice 11

Soit $(G, \cdot)$ un groupe, et H et K deux sous-groupes de G . On note

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 12 (Oral Mines)

Soit p et q deux nombres premiers et soit G un groupe commutatif d'ordre pq . Démontrer que G est cyclique.

Exercice 13 (Oral Mines)

Soit G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Démontrer que f est surjectif si et seulement si l'image par f de toute partie génératrice de G est une partie génératrice de G' .

Exercice 14

Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 15

Soit G un groupe d'ordre (cardinal) 4. Démontrer que G est isomorphe ou à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 16

Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique, puis commutatif.

Exercice 17

Tout sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Exercice 18 (Anneau)

Soit A l'ensemble des matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec a et b des entiers relatifs.

- 1) Démontrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de produits de matrices.
- 2) Déterminer les éléments inversibles de A .

Exercice 19 (Anneau des entiers de Gauss)

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + ib$, avec a et $b \in \mathbb{Z}$.

- 1) Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
- 2) Pour tout nombre complexe z , on note $N(z) = z\bar{z}$.
 - a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' , $N(z)N(z') = N(zz')$.
 - b) Démontrer que, pour tout entier de Gauss z , $N(z)$ est un entier naturel.
 - c) Soit z un entier de Gauss inversible. Dédurre des questions précédentes que $N(z) = 1$.
 - d) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice 20 (Localisation)

- 1) Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Démontrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

- 2) Soit $S \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ contenant 1 et stable par produit. Posons

$$\mathbb{Z}_S = \left\{ \frac{n}{s} \mid n \in \mathbb{Z}, s \in S \right\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}_S, +, \times)$ est un anneau. Retrouver le résultat de la question précédente.

- 3) Désormais, supposons que $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, où p est premier. Démontrer que pour tout nombre rationnel non nul x , au moins un des deux nombres x ou x^{-1} est élément de $\mathbb{Z}_S$.
- 4) Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}_S$. Démontrer que $B = \mathbb{Q}$ ou que $B = \mathbb{Z}_S$.

Exercice 21 (Nilpotents)

Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents.

- 1) Montrer que xy est nilpotent, puis que $x + y$ est nilpotent.
- 2) Montrer que $1_A - x$ est inversible.
- 3) Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit $u, v \in A$ tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 22 (Anneau de Boole)

On dit qu'un anneau A est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. On fixe A un tel anneau.

- 1) Démontrer que, pour tout $x \in A$, $x = -x$.
- 2) Montrer que A est commutatif.

3) On suppose que A est intègre. Montrer que A contient exactement deux éléments.

Exercice 23 (Corps)

Montrer que les ensembles suivants sont des corps.

1) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$

2) A un anneau intègre (commutatif) fini.

Exercice 24

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

et $E = \{M(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que E est une algèbre, et en donner une base en tant qu'espace vectoriel.

Exercice 25 (Morphisme d'algèbre)

Montrer que la conjugaison $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{cases}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre.

Exercice 26 (Morphisme d'algèbre)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- 1) Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre et $a \in A$. Montrer que l'évaluation $f_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow A \\ P \mapsto P(a) \end{cases}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbre. Que peut-on dire de son noyau ? Décrire son image.
- 2) Dédurre de la question précédente que, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0$, alors il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal π_u tel que $\pi_u(u) = 0$.
Montrer que $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 27 (Idéaux)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M une partie de A . On appelle annulateur de M l'ensemble

$$\text{Ann}(M) = \{x \in A \mid \forall y \in M, xy = 0\}$$

Démontrer que l'annulateur de M est un idéal de $(A, +, \times)$.

Exercice 28 (Idéaux)

Soit $A = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $B = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$.

- 1) Démontrer que A est un anneau pour les opérations somme et produit de fonctions.
- 2) Démontrer que B est un sous-anneau de A . B est-il un idéal de A ?
- 3) Démontrer que I est un idéal de A . I est-il un sous-anneau de A ?
- 4) Démontrer que I est un idéal maximal de A , c'est-à-dire que si J est un idéal de A tel que $I \subset J \subset A$, alors $J = I$ ou $J = A$.

Exercice 29 (Radical d'un idéal)

Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A , on appelle radical de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \geq 1, x^n \in I\}$$

- 1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A .
- 2) En déduire que l'ensemble $\text{Nilrad}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}$ des nilpotents de A est un idéal.
- 3) Soient I, J deux idéaux de A et $p \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \quad \text{et} \quad \sqrt{I^p} = \sqrt{I}.$$

- 4) Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = k\mathbb{Z}$, $k \geq 1$, déterminer le radical de I .

Exercice 30 (Idéaux)

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A = \mathbb{K}[X]$ muni des opérations usuelles. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et

$$I = \{P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in A \mid \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, a_k = 0\}$$

Montrer que I est un idéal, que l'on décrira.

Exercice 31

Décomposer le polynôme suivant en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = 2X^4 + X^2 - 3.$$