

Chaque numéro correspond à un exercice.

- 1) Montrer que c'est un sous-groupe, et penser à la conjugaison $a + \sqrt{2}b \mapsto a - \sqrt{2}b$.
- 2) Chercher f^{-1} .
- 3) Essayer, tester.
- 4) 1. Caculer x^n . 2. Prendre des générateurs.
- 5) 1. Se placer dans $\langle x \rangle$ avec x d'ordre infini. 2. Approche ensembliste.
- 6) Déterminer $f(1)$, $f(2)$, etc, $f(p/q)$.
- 7) f_g n'est pas un morphisme : cherchez plutôt f_g^{-1} .
- 8) Faire un changement d'indice.
- 9) 1. f_g bijective. 2. Égalité entre ensembles : par double inclusion. 3. Trouver une partition (un système complet d'évènements) de G . Compter les parties, les cardinaux.
- 10) Montrer $H \subset \langle G \setminus H \rangle$. Si $g \notin H$ et $x \in H$, où est gx ? Et $g^{-1}gx$?
- 11) Double implication, double inclusion. Bien penser que, si $h \in H$ et $k \in K$, $hk \in KH$ signifie qu'il existe h' et k' tels que $hk = k'h'$.
- 12) Si on trouve x d'ordre p et y d'ordre q , étudier l'ordre d de xy . S'il n'y a pas d'élément d'ordre q (par exemple), montrer que $\text{Card}(G)$ est une puissance de p .
- 13) Double implication. Si $H \subset G$ est un sous-groupe, $\langle H \rangle = H$. Si, pour tout H sous-groupe de G contenant A , on a la propriété $\mathcal{P}(H)$, alors, en particulier, on a $\mathcal{P}(\langle A \rangle)$.
- 14) Calculer $2 \times \bar{9}$ etc...
- 15) Distinguer les cas selon l'ordre maximal d'un élément de G .
- 16) Déterminer l'ordre de $x \in G$, $x \neq e$. En déduire que G est monogène, puis utiliser les théorèmes.
- 17) Utiliser $f : \mathbb{Z} \rightarrow G \langle x \rangle$ canonique du cours.
- 18) 1. Sous-anneau. Expliciter $a =$ et $b =$ lors du calcul de $M + M'$ et de MM' .
2. Calculer l'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Regarder le déterminant pour trouver une condition nécessaire et suffisante (donc une équivalence).
- 19) 1. Sous-anneau. 2c. Si $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$, alors $N(z) \in \mathbb{Z}^\times$.
- 20) 1. Sous-anneau. Pour les inversibles, caractériser $x \in \mathbb{D}$ en terme de valuation ($v_p(x)$), selon p .
2. Sous-anneau. Avec $x = 10$ et $S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. (Attention, hypothèse sur S) utiliser la valuation v_p . On peut, de plus, montrer que, si pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Z}_S$ ou $x^{-1} \in \mathbb{Z}_S$ alors $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ avec p premier.
4. Soit $\mathbb{Z}_S \subsetneq B \subset \mathbb{Q}$. Comme $v_p(\mathbb{Z}_S) = \mathbb{N}$ et $v_p(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$, trouver $x \in B$ tel que $v_p(x) < 0$, et montrer que $1/p \in B$, puis tout rationnel.
- 21) 1. Binôme ($xy = yx$: le dire!). 2. Penser à la série géométrique. 3. Écrire $(uv)^k$ avec des pointillés.
- 22) 1. On veut faire apparaître $2x$: écrivez $(x+1)^2$. 2. Idem : $(x+y)^2$. 3. Si $A = B$, alors $A - B = 0$.
- 23) 1. Sous-anneau, et tout élément non nul est inversible : penser au conjugué. 2. Étudier $x \mapsto ax$.
- 24) Deux options : à la main, bien expliciter a, b, c après chaque calcul. Ou trouver un morphisme d'algèbre tel que $E = \text{Im}(f)$.
- 26) 1. Pour le noyau, penser aux propriétés des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- 28) 2 et 3 : le seul idéal qui est aussi un sous-anneau est A , car 1_A est dedans.
4. Montrer que 1_A est dedans, en commençant par montrer que les fonctions constantes y sont.
- 29) 1. Comme pour les nilpotent (et pour cause!), penser au binôme. 2. $\{0\}$ est un idéal. 3. Doubles inclusions. 4. Décomposer k en facteurs premiers.
- 30) Tout idéal est premier : on cherche à écrire $P = QR$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$ quelconque.
- 31) On sait que, au pire, $P = QR$ avec $\deg P = \deg Q = 2$. Ici les techniques de recherche de racines plus classiques conviennent : racines évidentes, $(X-1)(X+1)(2X^2+3)$.