

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1) Domaine de définition et continuité de ζ .

a) Montrer que $D_\zeta =]1; +\infty[$.

b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur D_ζ ?

c) Soit $a > 1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

d) Montrer que la fonction ζ est continue sur D_ζ .

2) Variations de ζ et conséquences.

a) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f décroissante sur I , et celle de f croissante sur I .

b) Étudier le sens de variations de ζ .

c) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

3) Étude aux bornes.

a) i) Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

ii) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

b) Étude au voisinage de $x = 1$.

i) Étudiez la limite de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

ii) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

c) Étude au voisinage de $+\infty$: déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) Fonction de Dirichlet. On pose :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$$

a) Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leq F(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$

- c) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
 d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 e) Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x} \zeta(x)$$

5) Dérivabilité de ζ .

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_\zeta, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
 b) Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{(\ln n)^k}{n^x}$.
 c) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$, et retrouver les variations de ζ obtenues plus haut.
 d) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1, +\infty[$ sous forme d'une série.

6) (d'après centrale 2026) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble, infini, des nombres premiers. Notons $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc.

- a) Soit $x > 1$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^x} \right)_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est une famille sommable et que la somme de cette famille, notée $S_n(x)$ est donnée par

$$S_n(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^x}}$$

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la factorisation en nombres premiers ne fait intervenir que les nombres $p_1, \dots, p_n$.
 En considérant la somme $\sum_{k \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^x}$, exprimer la limite de $(S_n(x))$ lorsque n tends vers $+\infty$ à l'aide d'une valeur de la fonction ζ .

Ce résultat peut aussi se montrer à l'aide des probabilités, en utilisant la loi zêta.

Exercice 2 (type Mines, Centrale)

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

- 1) Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

- 2) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

- 3) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

- 4) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0, 1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}.$$

5) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

6) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

7) En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

8) En déduire le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.