

Devoir de Mathématiques numéro 1

Si vous bloquez, posez-moi des questions ou regardez le sujet 1.1.

Exercice 1 (Centrale MP 2025, ep1, Partie A)

Notations

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
- Si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la valuation p -adique de n , c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n .
- Si x est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . En d'autres termes,

$$\pi(x) = \text{card}(\{p \text{ premier}, p \leq x\}) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\text{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini A .

Partie A - Un encadrement de la fonction π

Le but de cette partie est d'établir l'encadrement suivant de la fonction π :

$$\forall x \in [3, +\infty[\quad \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

I - Calculs préliminaires

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{\substack{n+2 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n.$$

- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de n .

- 3) En déduire que, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

- 4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} < 4^n.$$

- 5) Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

- 6) En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\binom{2n}{n}$, alors $p^k \leq 2n$.

II - Majoration de $\pi(x)$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \geq \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leq n \\ p \text{ premier}}} p.$$

8) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

9) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Justifier que

$$\pi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(n) \leq 4 \frac{n}{\ln(n)}.$$

On pourra remarquer que $2 > \ln(4)$.

10) Soit $x \geq 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$, montrer que

$$\pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

III - Minoration de $\pi(x)$

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(2n) \geq n \frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

13) Soit $x \geq 3$. Montrer que

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)}.$$

On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ et utiliser 12.

L'inégalité précédente a été asymptotiquement améliorée en 1896, ainsi on admettra dans la suite du problème le (difficile) résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Si vous voulez faire la suite du sujet, c'est possible mais non demandé.