

Suites et séries de fonctions

8 octobre 2026

Les fonctions de ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

I) Introduction

A) Présentation

On s'intéresse, dans ce chapitre, à des suites (II)) puis des séries (III)) de fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) \end{cases}$$

À $x \in I$ fixé $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de réels.

On étudie son éventuelle limite, que l'on note généralement $f(x)$, si elle existe : cette limite dépend, a priori, du choix de x .

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$\rightsquigarrow$ limite selon la variable n

À $n \in \mathbb{N}$ fixé $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction.

On étudie • la continuité de $f_n : \forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$.

- l'intégrale $\int_a^b f_n(t) dt$ (limite d'intégrale de fonctions en escalier)
- le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f_n : \begin{cases} \forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} & (= f'_n(x_0)) \\ f'_n \text{ est continue sur } I \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ limites selon la variable x

B) Exemples

Deux familles d'exemples.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{cases}.$

fait en cours.

II) Suites de fonctions

A) Convergences

1) Convergence simple

Principe : on fixe $x \in I$, et on étudie $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Définition 1 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.
 (f_n) converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Exemple 1

Reprenons les exemples du paragraphe B)

$$1.1 \text{ Limite : } f : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \quad \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

Remarque 2

Ainsi, $\begin{cases} \text{la continuité} \\ \text{la valeur de l'intégrale} \\ \text{le caractère } \mathcal{C}^1 \end{cases}$ ne semblent pas forcément conservée lorsque $n \rightarrow +\infty$.

 **Mise en garde** : On n'intervertit **JAMAIS** deux limites sans théorème. 

 **Méthode**: Dans un exercice sur les suites (ou les séries) de fonctions, on commence *toujours* par regarder la limite pour la convergence simple : c'est facile (on fixe $x \in I$, puis on fait tendre $n \rightarrow +\infty$). Mais cette convergence ne conserve pas forcément les propriétés des fonctions f_n (continuité, valeur de l'intégrale, caractère $\mathcal{C}^1$).

2) Convergence uniforme

Notation 2

Notons $\mathcal{B}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ bornée sur } I\}$

C'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

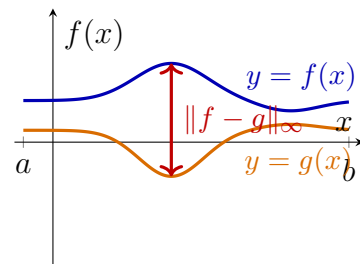
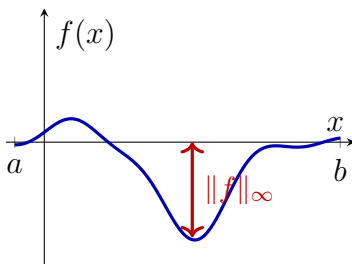
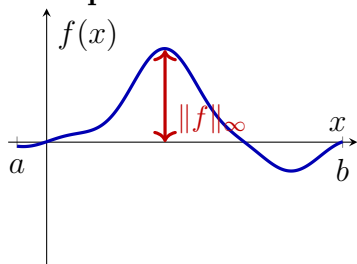
Remarque 3 1) f bornée sur $I \iff \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}$ existe et est finie.

2) Cas $I = [a, b] : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 3 (norme infinie)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. On appelle norme infinie de f le réel

$$\|f\|_{\infty} = \sup_I |f| = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}$$

Exemple 4**Remarque 5**

Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$
- 2) Pour $M \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\|f\|_\infty \leq M \iff \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.
- 3) Comme dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$), une norme sert à mesurer des distances :

$$\|f - g\|_\infty \text{ mesure une distance entre } f \text{ et } g$$

Nous verrons qu'il y a plusieurs façon de mesurer une distance entre deux fonctions. Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à une norme, $\|\cdot\|_\infty$. Nous étudierons en détail, au chapitre espaces vectoriels normés, ce qu'est une norme, et différentes normes.

Exemple 6

Calculs de norme infinie pour les exemples 1.1, 1.2, 2.1, 2.2

 **Méthode:** Pour calculer $\|f\|_\infty$, on dresse le tableau de variations de f (ou de $|f|$: le plus simple).

Définition 4 (convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.

(f_n) converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur I si $\|f_n - f\|_\infty$ existe à partir d'un certain rang n_0 , et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque 7 1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, u_n = \|f_n - f\|_\infty \in \mathbb{R}$. Donc on regarde la limite de (u_n) , suite de réels.

2) Avec des epsilons :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \\ \iff & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n_0 \text{ valable pour tout } x \in I) \end{aligned}$$

Preuve : remarque 5, point 2.

Théorème 8

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors (f_n) converge simplement vers f .

En résumé : convergence uniforme $\implies$ convergence simple

Démonstration. Soient (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(f_n) converge uniformément vers f

$$\implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \underbrace{\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}_{\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon} \quad \text{(On trouve un } n_0 \text{ qui fonctionne pour tous les } x \text{)}$$

$$\implies \forall x \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{(Pour chaque } x, \text{ on trouve un } n_0 \text{)}$$

$$\implies \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\implies (f_n) \text{ converge simplement vers } f$$

Démonstration alternative :

$$\forall x \in I, \quad 0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

Remarque 9

Jusqu'ici, nous n'avions aucun moyen simple de déterminer le f de la convergence uniforme.

Désormais, s'il y a convergence uniforme, la limite est forcément le f de la convergence simple. Ce qui nous conduit à la méthode suivante :

 **Méthode:** Pour déterminer si (f_n) converge uniformément,

- 1) On trouve le f de la convergence simple : $f(x) = \dots$ pour $x \in I$.
- 2) Puis on regarde si (f_n) converge uniformément vers $f : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = \dots ?$

Exemple 10

1.2 ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

2.1 converge uniformément sur $[0, 1]$.

2.2 ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Mais, pour $a > 0$ fixé, 2.2 converge uniformément sur $[-a, a]$ (avoir en tête la preuve, mais aussi l'illustration, c'est visuel).

2.3 converge uniformément sur $[-1, 1]$. Et pourtant, f n'est pas dérivable en $x = 0$, alors que f_n est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 11

Suite à l'exemple 2.2, on s'intéresse à une version affaiblie de la convergence uniforme, qui nous suffira dans beaucoup de cas.

Définition 5 (convergence uniforme sur tout segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.

(f_n) converge uniformément sur tout segment de I si,

$$\text{Pour tout } [a', b'] \subset I, (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a', b'].$$

Remarque 12

Vu l'exemple 2.2, la convergence uniforme sur tout segment est strictement plus faible que la convergence uniforme.

Remarque 13

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $J \subset I$,

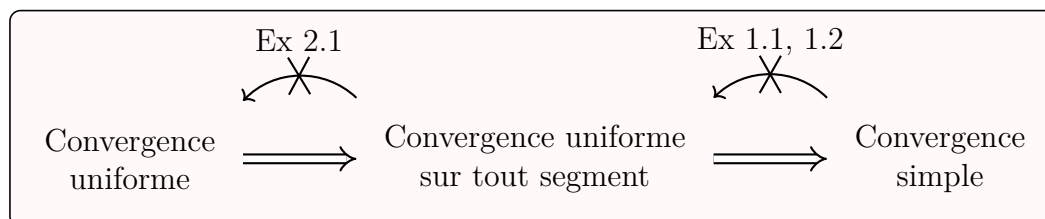
$$\begin{aligned} \forall x \in J, \quad |f(x)| &\leq \sup_{t \in I} |f(t)| = \|f\|_{\infty, I} \\ \implies \sup_{x \in J} |f(x)| &= \|f\|_{\infty, J} \leq \|f\|_{\infty, I} \end{aligned}$$

Donc la convergence uniforme sur I entraîne celle sur J . En particulier :

Proposition 14

La convergence uniforme entraîne la convergence uniforme sur tout segment.

En résumé :

**Remarque 15**

Point rédaction : on ne parle jamais de « la limite de (f_n) » : pour quelle convergence ? Toujours préciser le type de convergence.

Proposition 16 (structure algébrique)

Soit $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

$\{(f_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid \text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément}\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
 $\{(f_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid \text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur tout segment de } I\}$ est un sous-espace vectoriel de E (qui contient le précédent).

Remarque 17

Pour les autres opérations algébriques, voir l'exercice 2 : a priori, rien de plus que sous-espace vectoriel

B) Théorèmes avec convergence uniforme**1) Continuité****Théorème 18 (de continuité des suites de fonctions)**

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } I \rightarrow \mathbb{R}. \\ f : I \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ \bullet (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur (tout segment de) } I \end{cases}$

Alors f est continue sur I .

Démonstration. Faite en cours, à connaître (classique). Idée centrale :

Soit (f_n) et f vérifiant les hypothèses du théorème, et $x_0 \in I$.

Montrons que f est continue en x_0 . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f(x) - f_n(x)}_{\text{CU}} + \underbrace{f_n(x) - f_n(x_0)}_{f_n \in \mathcal{C}^0} + \underbrace{f_n(x_0) - f(x_0)}_{\text{CU}}$$

□

Remarque 19 1) Le théorème permet d'écrire, pour tout $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \text{C'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow x_0} \overbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)} &= \overbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad \text{par continuité de } f_n \text{ en } x_0 \end{aligned}$$

C'est un théorème d'*interversion de limites*.

- 2) La continuité est une propriété de nature locale : pour montrer la continuité en x_0 , il suffit de se placer sur $[a', b']$ tel que $x_0 \in]a', b'[\subset I$. Donc on peut se contenter de la convergence uniforme sur tout segment.

Ou, plus généralement, sur tout intervalle de forme adaptée telle que la réunion de tous ces intervalles donne I .

 **Méthode:** On en déduit une méthode pour montrer la non-convergence uniforme :

Si la limite d'une suite (f_n) trouvée par la convergence simple

- 1) n'est pas continue,
- 2) alors que les f_n le sont,

il n'y a pas convergence uniforme

Exemple 20

Reprenons l'exemple 1.1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$ est continue car polynomiale sur $[0, 1]$. Or f est discontinue en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$$

Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Théorème 21 (de la double limite)

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } I \rightarrow \mathbb{R}. \\ f : I \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

- Si
- $a \in I$, $a = \inf I$ ou $a = \sup I$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n$ existe et est fini,
 - (f_n) converge uniformément vers f sur I ,

(Donc $a \in \overline{\mathbb{R}}$)

Alors $\begin{cases} (\ell_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \end{cases}$

Démonstration. Admis. □

Remarque 22 1) La conclusion $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ s'écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)}_{\ell_n}$$

C'est un théorème *d'interversion de limites*.

2) Le théorème de continuité des suites de fonctions (18) est un cas particulier de ce théorème, en prenant $a = x_0 \in I'$, avec $I' \subset I$ un intervalle où il y a convergence uniforme.

2) Intégration

Théorème 23 (d'intégration d'une limite uniforme)

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } I \rightarrow \mathbb{R} \\ f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x_0 \in I \end{cases}$

Si $\bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ,
 $\bullet (f_n)$ converge uniformément vers f sur tout segment de I ,

Alors, en posant $F_n : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{x_0}^x f_n(t) dt \end{cases}$ et $F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt \end{cases}$,

(F_n) converge uniformément sur tout segment de I vers F .

Démonstration. Soit (f_n) , f et $x_0 \in I$ vérifiant les hypothèses du théorème.

D'après le théorème 18 de continuité, f est continue sur I , donc, pour tout $x \in I$, $F(x)$ existe.

Soit $[a', b'] \subset I$ un segment de I . On considère la $\|\cdot\|_\infty$ sur $[a', b']$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_0, b'], \quad |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f_n(t) - f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)| dt && \text{inégalité triangulaire, car } x_0 \leq x \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f_n - f\|_\infty dt \\ &\leq |x - x_0| \cdot \|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

De même, en étant attentif aux signes, on trouve $\forall x \in [a', x_0], \quad |F_n(x) - F(x)| \leq |x - x_0| \cdot \|f_n - f\|_\infty$.

D'où, en majorant $x \mapsto |x - x_0|$ continue sur le segment $[a', b']$ par $b' - a'$,

$$\forall x \in [a', b'], \quad |F_n(x) - F(x)| \leq (b' - a') \|f_n - f\|_\infty$$

Puis, en passant à la borne supérieure en x :

$$\|F_n - F\|_\infty \leq (b' - a') \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I . □

Remarque 24

Même si (f_n) converge uniformément vers f sur I , la convergence uniforme de (F_n) vers F n'est à priori que sur $[a', b']$, c'est-à-dire sur tout segment de I .

Corollaire 25

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}^2. \\ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a, b], \\ \bullet (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a, b], \end{cases}$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. Théorème 23 d'intégration d'une limite uniforme, avec $x_0 = a$ et en ne s'intéressant qu'à la convergence simple en $x = b$. $\square$

Contre-exemple 26

La suite de l'exemple 1.2 ne converge pas uniformément, car les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1/2 \neq 0 = \int_0^1 f(t) dt$.

Remarque 27

Le corollaire n'est valable que sur un segment. Cf l'exercice 7 pour un contre-exemple.

3) Dérivation

Remarque 28

On ne sait qu'intégrer des inégalités, donc la preuve du théorème d'intégration ne peut pas s'adapter. On ne sait pas dériver... intégrons! Le théorème suivant est un théorème d'intégration maquillé en théorème de dérivation :

Théorème 29 (de dérivation des suites de fonctions)

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } I \rightarrow \mathbb{R}. \\ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } g : I \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

Si $\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \\ \bullet (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I, \\ \bullet (f'_n) \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur tout segment de } I, \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \bullet (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment de } I. \\ \bullet f \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } f' = g. \end{cases}$

Contre-exemple 30

L'exemple 2.3, $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$, mais f n'est pas $\mathcal{C}^1$: l'hypothèse de convergence uniforme sur $[-1, 1]$ des (f_n) ne sert à rien.

Si on veut f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , l'hypothèse contraignante est $\boxed{(f'_n) \text{ converge uniformément sur } I.}$

Démonstration. Soient (f_n) , f et g vérifiant les hypothèses du théorème.

Appliquons le théorème 23 d'intégration d'une limite uniforme à (f'_n) :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f'_n est continue sur I car f_n est $\mathcal{C}^1$,
- (f'_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I ,

Donc, en posant $G_n: \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \end{cases}$ et $G: \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^x g(t) dt \end{cases}$, d'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme,

(G_n) converge uniformément, sur tout segment de I , vers G .

Par conséquent, (G_n) converge simplement vers G sur I :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad G(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \\ &= f(x) - f(x_0) \end{aligned} \quad \text{par convergence simple de } (f_n) \text{ vers } f$$

Ainsi, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = G_n + f_n(x_0) \quad \text{et} \quad f = G + f(x_0) \quad (\star)$$

Or, de plus, les hypothèses

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f'_n est continue sur I car f_n est $\mathcal{C}^1$,
- (f'_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I ,

et le théorème 18 de continuité des suites de fonctions entraînent que g est continue sur I .

Donc G , primitive de g continue sur I , est $\mathcal{C}^1$ sur I . D'où

$$f = G + f(x_0) \text{ est } \mathcal{C}^1, \quad \text{et} \quad f' = G' = g$$

Montrons que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I : d'après $(\star)$,

$$f_n - f = G_n - G + f_n(x_0) - f(x_0)$$

En prenant la norme infinie sur un segment $[a', b'] \subset I$, il vient

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \|G_n - G\|_\infty + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

En utilisant la convergence uniforme de (G_n) vers G sur le segment, et la convergence simple de (f_n) vers f , par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, et on a convergence uniforme sur tout segment de I de (f_n) vers f . $\square$

Proposition 31 ($\mathcal{C}^k$)

Soit $k \in \mathbb{N}$ et (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$,

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,

- $\forall i \in \llbracket 0, k \llbracket$ $(f_n^{(i)})$ converge simplement sur I ,

- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I ,

Alors la limite f , pour la convergence simple, de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \forall x \in I, \quad f^{(i)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}(x)$$

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(f_n^{(i)})$ converge uniformément sur tout segment de I .

Démonstration. Par récurrence sur k . $\mathcal{H}_0$ est donné par le théorème 18 de continuité, et le passage $\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ est une amélioration de la preuve du théorème 29 de dérivation : si $(f_n^{(k+1)})$ converge uniformément et $(f_n^{(k)})$ converge simplement, alors $(f_n^{(k)})$ converge uniformément. $\square$

4) Approximations uniformes

But du paragraphe : soit $A \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quelles fonctions $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ peuvent être atteintes comme limite uniforme de fonctions $f_n \in A$? C'est-à-dire

$$\exists (f_n) \in A^{\mathbb{N}} / (f_n) \text{ converge uniformément sur (tout segment de) } I \text{ vers } f$$

Remarque 32

- 1) Si $A \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, alors f sera forcément continue (théorème 18 de continuité).
- 2) Deux exemples de A « naturels » nous intéressent plus particulièrement, où $I = [a, b]$ segment :
 - a) L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions en escalier.
C'est la sous-algèbre engendrée par les fonctions $\mathbb{1}_{[a', b']}$ où $[a', b] \subset [a, b]$.
 - b) L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$.
C'est la sous-algèbre engendrée par $g(x) = x$, où $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Désormais $a < b$ sont deux réels et $I = [a, b]$.

Proposition 33

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Il existe une suite $(\varphi_n) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque 34 1) Écriture plus formelle :

$$\forall f \in \mathcal{C}_m^0([a, b], \mathbb{K}), \exists (\varphi_n) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}} / \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \varphi_n\|_{\infty} = 0$$

Toutes les fonctions sont bornées car continues (au besoin par morceaux) sur un segment : $\|f - \varphi_n\|_{\infty}$ existe.

- 2) Ce théorème signifie que les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues par morceaux. Nous reverrons la notion de densité lors du chapitre sur les espaces vectoriels normés.
- 3) La proposition 9 du chapitre 19 (intégration) de MP2I est une conséquence de ce résultat. Rappel de la proposition :

$$\forall f \in \mathcal{C}_m^0([a, b], \mathbb{K}), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) / \|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

La proposition 33 ci-dessus nous donnant l'existence de (φ_n) qui converge uniformément vers f , c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathcal{C}_m^0([a, b], \mathbb{K}), \exists (\varphi_n) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}} / \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \|f - \varphi_n\|_{\infty} \leq \varepsilon \right]$$

On cherche juste une fonction : donc, après avoir trouvé n_0 ci-dessus, on pose $\varphi = \varphi_{n_0}$, ce qui prouve la proposition 19.9 de MP2I.

Ce résultat permet de construire l'intégrale de Riemann.

Démonstration. Admis pour l'instant. □

Théorème 35 de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration. Admis. En devoir facultatif. □

Remarque 36 1) En notant

$$\mathcal{P}(I, \mathbb{K}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists P \in \mathbb{K}[X], \forall x \in I \quad f(x) = P(x)\}$$

l'ensemble des fonctions polynomiales de I dans $\mathbb{K}$, le théorème s'écrit

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \quad \exists (f_n) \in (\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K}))^{\mathbb{N}} / \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0$$

2) Ce théorème est puissant : pour montrer un résultat sur les fonctions continues, pour peu que ce résultat « passe à la limite uniforme » (notion à préciser), il suffit de le montrer pour les fonctions polynomiales.

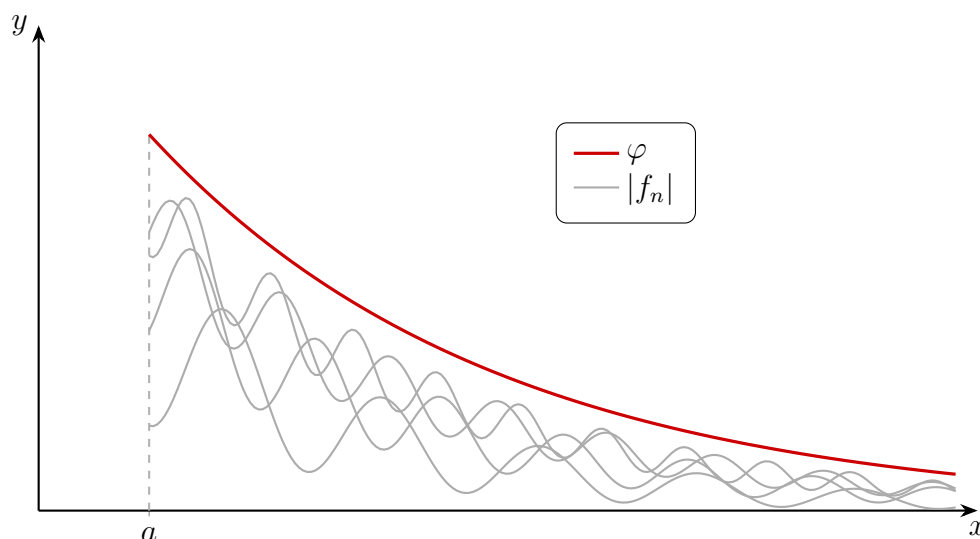
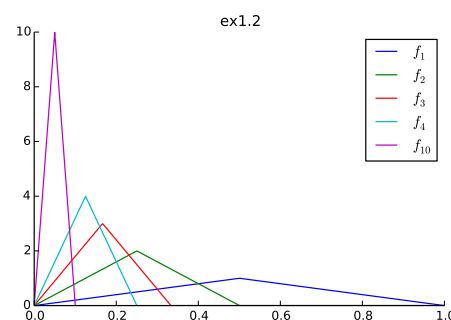
Et inversement : on peut approcher des fonctions continues extrêmement sauvages, par exemple dérivables nulle part, par des fonctions polynomiales.

3) Ce résultat n'est valable que sur un segment !

C) Théorème d'interversion sans convergence uniforme

Intuitivement, le problème dans l'exemple 1.2 était lié au départ du sommet du pic vers $+\infty$.

Que se passe-t-il si on arrive à contenir nos (f_n) sous une borne, par exemple une fonction φ intégrable sur I ?



Théorème 37 de convergence dominée

Soient $\begin{cases} (f_n) \text{ une suite de fonctions } I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue par morceaux,} \\ f : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue par morceaux,} \end{cases}$

Si $\begin{cases} \bullet (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I, \\ \bullet \exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ intégrable sur } I \text{ telle que} \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq \varphi$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et f sont intégrables sur I , et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 38

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de majoration (du cours d'intégration) s'écrit

$$\begin{cases} |f_n| \leq \varphi \\ \int_I \varphi \text{ converge} \end{cases} \implies \int_I |f_n| \text{ converge}$$

De même, en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ à $x \in I$ fixé (convergence simple), il vient $|f| \leq \varphi$, et on conclue de même $\int_I |f|$ converge.

 **Méthode:** Ici, pas de convergence uniforme. On cherche φ , c'est-à-dire à majorer f_n indépendamment de n :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \underbrace{\varphi(x)}_{\text{plus de } n}$$

Exemple 39

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

III) Séries de fonctions

Étudier la série de terme générale (f_n) , c'est se donner une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, et s'intéresser à la suite des sommes partielles

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$$

La suite de fonctions (S_n) est l'objet d'étude de cette partie.

Tout le II) s'applique : convergence simple, convergence uniforme, théorèmes d'interversion de limites.

Notation 6

Si (f_n) est une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{sous réserve d'existence.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \quad \text{sous réserve d'existence.}$$

Remarque 40

Contrairement aux suites, où l'expression de f_n était donnée et relativement facile à manipuler — on arrivait, par exemple, à calculer $\|f_n - f\|_\infty$ —, pour les séries l'expression de S_n ou celle de $S - S_n = R_n$ est rarement simple : les techniques sont donc un peu différentes.

A) Convergences

1) Adaptation des notions du II.A)

Définition 7 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.

La série $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = S(x)$$

Remarque 41

C'est exactement « (S_n) converge simplement vers S sur I ».

 **Méthode:** On fixe $x \in I$ (comme pour la convergence simple des suites de fonctions) puis on utilise les méthodes des séries numériques (, o, ≤, Riemann) pour étudier $\sum u_n$ où $u_n = f_n(x)$.

Exemple 42

1.1 Posons $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (1-x)^n \end{cases} \quad \text{où } I =]0, 1].$

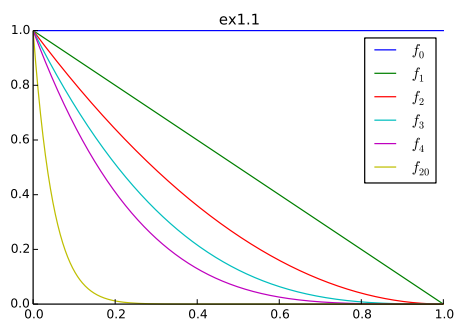
Convergence simple : Soit $x \in]0, 1]$ fixé.

$\sum f_n(x)$ est une série géométrique de raison $q = 1 - x \in [0, 1[$, donc $\sum q^n$ converge. De plus,

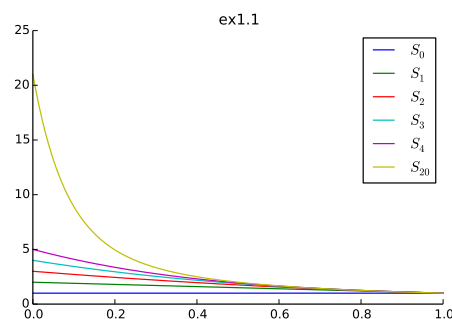
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x) &= \sum_{k=0}^n (1-x)^k \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

D'où $S(x) =$

Conclusion : $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers $S: \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{cases}$



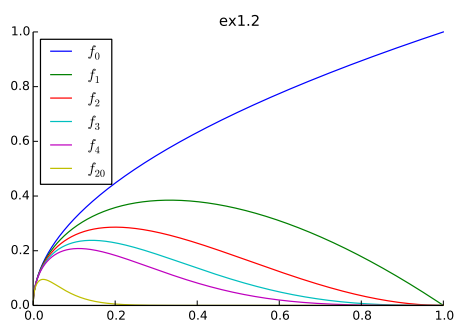
(a) Termes généraux f_n



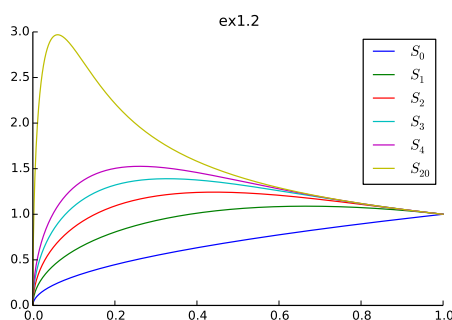
(b) Sommes partielles S_n

FIGURE 1 – Exemple 1.1 : $f_n : x \mapsto (1-x)^n$ sur $I =]0, 1]$

1.2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}, f_n: \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}(1-x)^n \end{cases}$ où $I = [0, 1]$.



(a) Termes généraux f_n



(b) Sommes partielles S_n

FIGURE 2 – Exemple 1.2 : $f_n : x \mapsto \sqrt{x}(1-x)^n$ sur $I = [0, 1]$

Convergence simple : Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

Pour $x > 0$, identique à l'exemple 1.1, le résultat est juste multiplié par la constante $\sqrt{x}$ (x fixé!). Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x) =$$

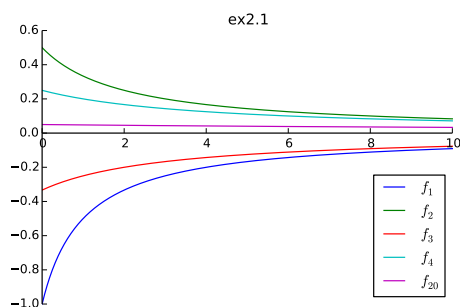
$$S(x) =$$

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $S(0) = 0$.

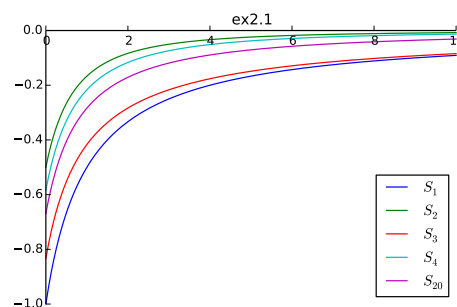
Conclusion : $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers S : $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{cases}$

Aura-t-on convergence uniforme ?

2.1 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n+x} \end{cases} \text{ où } I = \mathbb{R}_+.$



(a) Termes généraux f_n



(b) Sommes partielles S_n

FIGURE 3 – Exemple 2.1 : $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

Convergence simple : Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

○ $|f_n(x)| = \quad \sim \quad$ or

Donc

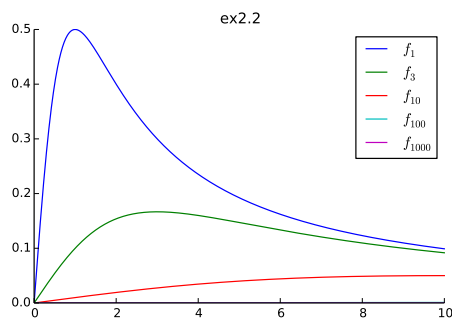
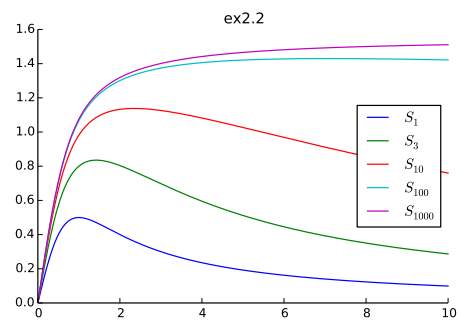
○ $f_n(x) = (-1)^n a_n$ avec $\begin{cases} a_n = \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$

Donc, d'après le ...

Conclusion : $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. (pas d'expression simple de S ici)

2.2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{n^2 + x^2} \end{cases} \text{ où } I = \mathbb{R}_+.$

Convergence simple : Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geq 0$.

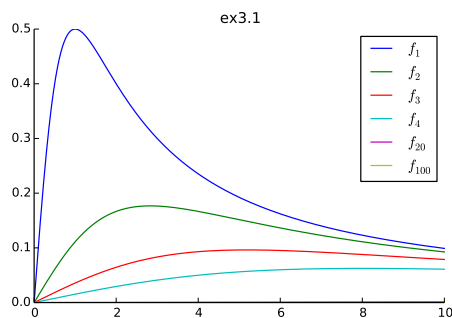
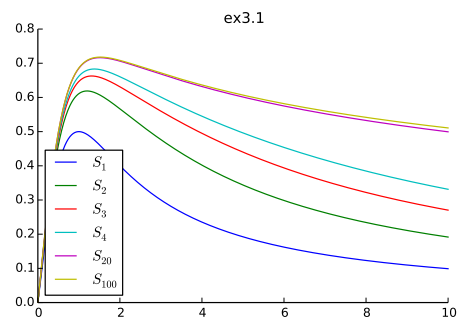
(a) Termes généraux f_n (b) Sommes partielles S_n FIGURE 4 – Exemple 2.2 : $f_n : x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

- Si x

- Si x

Conclusion : $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. (pas d'expression simple de S).

3.1 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{n^3 + x^3} \end{cases} \text{ où } I = \mathbb{R}_+.$

(a) Termes généraux f_n (b) Sommes partielles S_n FIGURE 5 – Exemple 3.1 : $f_n : x \mapsto \frac{x}{n^3 + x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

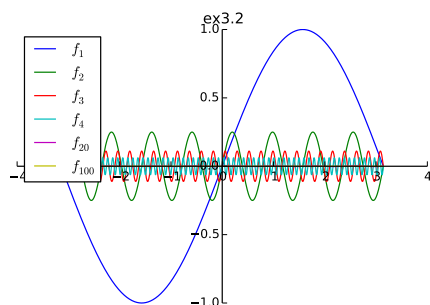
Convergence simple : Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geq 0$.

- Si x

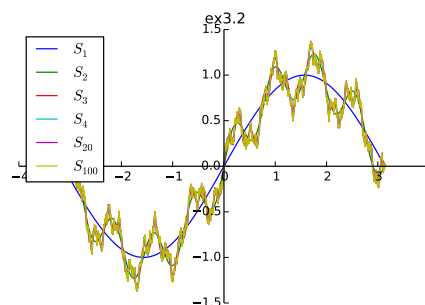
- Si x

Conclusion :

3.2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(n^3 x)}{n^2} \end{cases} \text{ où } I = \mathbb{R}.$



(a) Termes généraux f_n



(b) Sommes partielles S_n

FIGURE 6 – Exemple 3.1 : $f_n : x \mapsto \dots$ sur $I = \mathbb{R}$

Convergence simple : Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Conclusion :

Définition 8 (convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\sum f_n$ converge uniformément sur I si (S_n) converge uniformément sur I .

Remarque 43

En réécrivant la définition de la convergence uniforme d'une suite, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$.
 Or $S - S_n = R_n$. La convergence uniforme s'écrit donc

Proposition 44

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\sum f_n$ converge simplement et (R_n) converge uniformément sur I .

Remarque 45

C'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$

 **Méthode:** Majorer (ou minorer pour la divergence) $\|R_n\|_\infty$ (donc $|R_n(x)|$ indépendamment de x).

L'étude directe est rare car on ne maîtrise pas $R_n(x)$, sauf dans deux cas : les séries géométriques, et les séries alternées.

Exemple 46

1.1 cf feuille volante.

1.2 cf feuille volante.

2.1 cf feuille volante.

2) Convergence normale

C'est une convergence propre aux séries de fonctions.

Définition 9 (convergence normale)

Soit (f_n) une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$.

$\sum f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 47

(f_n) est bornée, au moins à partir d'un certain rang.

 **Méthode:** On fixe $n \in \mathbb{N}$, on calcule $\|f_n\|_\infty$ (ou on majore : $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$) (cf methode 2)). Puis, on étudie la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.

Exemple 48 (2.1)

On savait déjà que cette série ne convergeait pas absolument : il n'y avait aucun espoir qu'elle converge normalement. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 49

La convergence normale entraîne la convergence absolue simple.

Démonstration. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge normalement sur I .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

Donc la convergence normale, c'est-à-dire $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, entraîne $\sum |f_n(x)|$ converge, c'est-à-dire la convergence absolue simple. $\square$

La convergence normale est intéressante pour la raison suivante :

Théorème 50

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

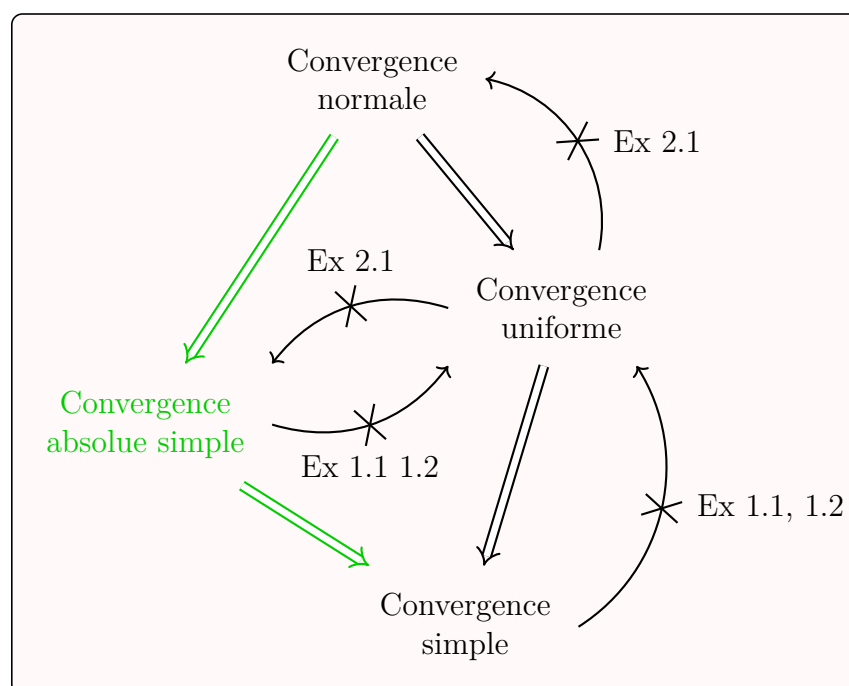
Démonstration.

□

Example 51

ex	convergence simple	convergence absolue simple	convergence uniforme	convergence normale
1.1				
1.2				
2.1				
2.2				
3.1				
3.2				

En résumé :



B) Théorèmes avec convergence uniforme

C) Théorème d'interversion sans convergence uniforme